

From Intuition to Deduction: A Qualitative Analysis of the Structure of Students' Geometric Argumentation

Narges Vosooghinejad*, Mahdokht Naghibi Beidokhti**, Reza Heidari Ghezeljeh***

* M.Sc. in Mathematics Education, Farhangian University P.O. Box 889-14665, Tehran, Iran. Email: nargesvosogh24@gmail.com

** Assistant Professor, Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O. Box 889-14665, Tehran, Iran. (Corresponding Author) Email: mnb5172@cfu.ac.ir

*** Assistant Professor, Department of Mathematics Education, Farhangian University, P.O. Box 889-14665, Tehran, Iran. Email: reza.heidari.gh@cfu.ac.ir

Article Info

Abstract

Article type:

Research Article

Key words:

Argumentation
Structure, Geometry,
CKC-enriched
Toulmin model,
Inductive
argumentation,
Abductive
argumentation,
deductive

Article history:

Received : 17 July
2026

Accepted : 27 August
2026

This study aimed to analyze the structure of students' argumentation while solving a geometry problem. As a qualitative inquiry, the study examined the structural and cognitive components involved in the development of students' argumentation throughout problem solving. Participants were three groups of three eleventh-grade students from a county in Tehran Province. The groups were organized from among 15 students based on similarities in their reasoning patterns, and each group then solved the same geometry problem. Data were collected through video recordings, transcripts of group discussions, field notes, and students' written work, enabling reconstruction of their reasoning processes and interactions. Data analysis was conducted using an integrated analytical framework combining Toulmin's model of argumentation and Balacheff's cKc model. The findings revealed that students' argumentation was dynamic and multilayered, emerging through the interaction of components such as data, claims, warrants, backing, control, rebuttals, operators, and representational systems. Four forms of reasoning were identified: visual reasoning, inductive reasoning, abductive reasoning, and informal deductive reasoning. Among these, abductive and informal deductive reasoning played the most influential role in supporting students' movement toward formal deductive argumentation. Furthermore, the coordination of multiple representations—particularly the transformation of visual and numerical representations into algebraic relationships—was essential for constructing coherent argumentation. The activation of control and rebuttal components, together with collaborative interactions, enabled students to refine their reasoning, revise their arguments, and strengthen the validity of their conclusions. The findings may contribute to the revision of mathematics curricula, the design of instructional activities, and inform future research.

Cite this Article:

Vosooghinejad, N , Naghibi Beidokhti, M and Heidari Ghezeljeh, R . (2026). From Intuition to Deduction: A Qualitative Analysis of the Structure of Students' Geometric Argumentation. (e251749). *Theory and Practice in the Curriculum*, 81-110. 14 (27), e251749
doi: 10.22034/cstp.2026.592086.1181



© 2016 by Iranian Curriculum Association Press Publisher:
Iranian Curriculum Association Press

Extended Abstract

Argumentation is one of the fundamental components of mathematical thinking and plays a central role in problem solving and proof. It is identified in the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) standards as one of the primary goals of mathematics education. However, both national and international studies have shown that many students encounter difficulties in the argumentation process, including reliance on empirical observations, limited ability to provide valid warrants, difficulty coordinating multiple representations, and challenges in progressing from intuitive to deductive argumentation. Therefore, understanding how argumentation develops and identifying the factors that influence this process have become important research concerns in mathematics education. Such an understanding enables researchers to analyze students' mathematical argumentation more systematically and to explain the structure and validity of their arguments in problem-solving situations.

In recent years, several theoretical frameworks have been proposed to analyze the structure of mathematical argumentation. Toulmin's Argumentation Model explains the structural organization of argumentation through components such as data, claim, warrant, backing, rebuttal, and qualifier, whereas Balacheff's framework emphasizes the cognitive dimensions of argumentation by focusing on operators, representations, and control structure. Since each framework captures only part of the complexity of mathematical argumentation, the integrated Toulmin–Balacheff model combines the strengths of both approaches, enabling the simultaneous analysis of the structural and cognitive dimensions of argumentation. This integrated model provides a more comprehensive understanding of how students' argumentation is constructed, refined, and validated.

Although a number of international studies have investigated the structure of mathematical argumentation, only a limited number of studies in Iran have employed systematic frameworks, such as the Toulmin and Balacheff models, to analyze the components of students' argumentation. This research gap highlights the need to apply integrated analytical models in mathematics education in Iran.

Accordingly, the present study employed the integrated Toulmin–Balacheff model to analyze the structure of eleventh-grade students' geometric argumentation, identify its components, and explain the relationships among these components throughout the problem-solving process. It is expected that the findings of this study will contribute to a deeper understanding of students' argumentation processes and provide evidence for improving the teaching of reasoning and proof, as well as informing the design and revision of mathematics curricula.

This study adopted a qualitative research approach to obtain an in-depth understanding of the quality of students' argumentation. The purpose of the study was to analyze the structure and development of students' argumentation while solving a geometry problem using the integrated Toulmin–Balacheff model. The participants were three groups of three eleventh-grade students. The groups were organized from among 15 students based on similarities in their reasoning patterns. Each group then solved the same geometry problem. To achieve this aim, the following research question was addressed: How can the structure of eleventh-grade students' geometric argumentation be characterized based on the integrated Toulmin–Balacheff model?

To collect the data, a geometry problem was designed that required students to identify patterns, use multiple representations, establish geometric relationships, and construct arguments to justify the

generalization of the result. All group discussions were audio- and video-recorded, and students' written work, calculations, and diagrams were collected as supporting research documents. The data were analyzed using qualitative content analysis based on the integrated Toulmin–Balacheff model in order to identify the structural components of students' argumentation and examine the relationships among these components throughout the argumentation process.

Several complementary strategies were employed to enhance the trustworthiness of the analysis. First, the findings obtained from the analysis of the group discussions were triangulated with students' written worksheets, classroom observations, and video recordings to ensure that the interpretations were not based on a single source of evidence. Second, the transcribed group discussions and students' written responses were provided to another mathematics education expert, who independently identified and coded the components of students' argumentation. Inter-coder agreement was calculated using the percentage agreement method proposed by Krippendorff (2004) and reached 80%, indicating satisfactory consistency in identifying the components of the integrated Toulmin–Balacheff model and confirming the dependability of the analysis.

The findings revealed that analyzing students' argumentation using the integrated Toulmin–Balacheff model uncovered clear differences in the organization of argumentation components, the quality of warrants, the use of representations, the control structure, and the pathways through which claims were established. Although all three groups started with the same initial data, their argumentation developed along different trajectories as a result of the distinct interactions among these components.

In all three groups, argumentation began with the observation of a geometric pattern, the use of visual representations, and the identification of initial data. Based on these observations, students proposed their initial claims. However, analysis of the argumentation process showed that the first group activated both the control structure and rebuttal to critically re-evaluate its initial claim and eventually reached a valid conclusion through algebraic reasoning. In this group, warrants evolved from intuitive and empirical justifications to theoretically grounded justifications, while representations progressed from visual and numerical forms to algebraic and symbolic representations. Similarly, although the second group initially relied on empirical observations, its members gradually refined their claims throughout the problem-solving process by activating the control structure and rebuttal. Through the use of algebraic relationships, they ultimately reached the correct conclusion. Their warrants likewise evolved from intuitive and empirical warrants to warrants grounded in mathematical relationships, and their representations evolved from visual and verbal forms to algebraic representations.

The analysis further showed that although the third group obtained the correct answer, its argumentation remained predominantly at the inductive level. The students relied mainly on pattern observation and numerical calculations to reach their conclusion, whereas the control structure and rebuttal played only a limited role in evaluating or revising their claims. Consequently, their warrants remained largely intuitive and empirical, and their representations did not progress beyond visual and numerical forms to algebraic or theoretical representations. As a result, their argumentation did not develop into a deductive form that was independent of empirical evidence.

Overall, four forms of reasoning were identified throughout the problem-solving process: visual reasoning, inductive reasoning, abductive reasoning, and informal deductive reasoning. The findings further demonstrated that representations, the control structure, rebuttal, and the quality of warrants played decisive

roles in strengthening the validity of students' argumentation. The interaction among these components facilitated the construction of more coherent arguments and supported students' progression toward formal deductive argumentation.

Taken together, the findings of the present study highlight the multidimensional nature of students' mathematical argumentation and the importance of considering both its structural and cognitive dimensions simultaneously. They show that students' geometric argumentation in solving problems is a dynamic and multilayered process that develops through the continuous interaction of data, claim, warrant, backing, representations, operators, control structure, and rebuttal. Throughout this process, each component is influenced by the others while simultaneously affecting the quality and validity of the argumentation. Weakness in the organization of any of these components may lead to empirical and intuitive warrants, whereas their effective interaction provides the basis for the development of abductive and informal deductive argumentation. The findings also showed that the control structure plays a central role in evaluating, revising, and refining argumentation, and that the activation of rebuttal encourages students to reconsider their claims and reconstruct their argumentation. Furthermore, representations not only serve to express mathematical ideas but also play a cognitive role in the construction, organization, and development of argumentation. The transition from visual and numerical representations to algebraic representations was found to be one of the key factors contributing to the improvement of the quality of argumentation. These findings may provide evidence to inform the revision of mathematics curricula, particularly with regard to the teaching of reasoning and proof, and may support the design of more effective instructional approaches as well as future research in this field.

Keywords: Argumentation Structure, Geometry, ck¢-enriched Toulmin model, Inductive argumentation, Abductive argumentation, deductive argumentation.

از شهود تا استنتاج:

تحلیل کیفی ساختار استدلال هندسی دانش آموزان

نرگس وثوقی نژاد، *، مهدخت نقیبی بیدختی **، رضا حیدری قزلهجه ***

* کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران. رایانامه: nargesvosogh24@gmail.com

** استادیار گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران. (نویسنده مسئول) رایانامه: mnb5172@cfu.ac.ir

*** استادیار گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵-۸۸۹، تهران، ایران. رایانامه: reza.heidari.gh@cfu.ac.ir

چکیده

اطلاعات مقاله

پژوهش حاضر باهدف تحلیل ساختار استدلال دانش آموزان در فرایند حل مسئله هندسه انجام شد. این مطالعه از نوع کیفی و با رویکرد بازسازی فرایند استدلال انجام گرفت و در پی آن بود تا مؤلفه‌های ساختاری و شناختی دخیل در شکل‌گیری استدلال دانش آموزان را در جریان حل مسئله بررسی کند. شرکت‌کنندگان سه گروه سه‌نفری از دانش آموزان پایه یازدهم یکی از شهرستان‌های استان تهران بودند. این گروه‌ها از میان ۱۵ دانش آموز و بر اساس شباهت در الگوهای استدلالی آنان سازمان‌دهی شدند، سپس هر گروه به حل یک مسئله هندسی مشترک پرداخت. داده‌ها از طریق فیلم‌برداری، ثبت گفت‌وگوهای گروهی، یادداشت‌های میدانی و مستندات نوشتاری دانش آموزان گردآوری شد تا بازسازی نسبتاً دقیقی از فرایند استدلال و تعاملات آنان امکان‌پذیر گردد. تحلیل داده‌ها بر اساس مدل تلفیقی تولمین و بالاچف انجام شد. یافته‌ها نشان دادند که ساختار استدلال دانش آموزان چندلایه و پویاست و مؤلفه‌هایی مانند داده، ادعا، توجیه، پشتوانه، کنترل، شرایط ابطال، عملگر و بازنمایی به‌صورت تعاملی در شکل‌گیری آن نقش دارند. چهار نوع استدلال دیداری، استقرایی، تحقیقی-استنتاجی و استنتاجی غیررسمی شناسایی شدند که در این میان، استدلال‌های تحقیقی-استنتاجی و استنتاجی غیررسمی بیشترین نقش را در نزدیک‌شدن به سطح استنتاجی رسمی داشتند. نقش بازنمایی‌ها، به‌ویژه تبدیل بازنمایی‌های تصویری و عددی به روابط جبری، در انسجام استدلال تعیین‌کننده بود و فعال‌شدن کنترل‌ها و شرایط ابطال همراه با تعاملات گروهی، اصلاح مسیر استدلال و افزایش اعتبار آن را ممکن ساخت. یافته‌های این پژوهش می‌تواند در بازنگری برنامه‌های درسی ریاضی، طراحی فعالیت‌های آموزشی و جهت‌دهی پژوهش‌های آینده مورد استفاده قرار گیرد.

نوع مقاله:

علمی-پژوهشی

واژگان کلیدی:

ساختار استدلال، هندسه، مدل تلفیقی تولمین و بالاچف، استدلال استقرایی، استدلال تحقیقی-استنتاجی، استنتاجی.

تاریخچه مقاله:

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۴/۲۶

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۶/۰۵

استناد به این مقاله:

وثوقی نژاد، نرگس، نقیبی بیدختی، مهدخت و حیدری قزلهجه، رضا. (۱۴۰۵). از شهود تا استنتاج: تحلیل کیفی ساختار استدلال هندسی دانش آموزان. (e251749). نظریه و عمل در برنامه درسی، ۱۱۰-۱۴، (۲۷).
doi: 10.22034/cstp.2026.592086.1181



مقدمه

ریاضیات در میان علوم جایگاهی ممتاز دارد، زیرا به عنوان دانشی شناخته می شود که ناب ترین و دقیق ترین نوع علوم است (غلام آزاد و همکاران، ۲۰۰۳). یکی از ویژگی های برجسته ریاضیات، جایگاه محوری استدلال^۱ در شکل گیری، تبیین و یادگیری مفاهیم ریاضی است. استدلال نه تنها مبنایی برای ارزیابی و توجیه درستی گزاره های ریاضی به شمار می رود، بلکه در شکل گیری درک مفهومی و پرورش تفکر ریاضی نیز نقشی اساسی ایفا می کند (استیلیانیدز^۲ و همکاران، ۲۰۲۴). پژوهش های آموزش ریاضی نیز بر نقش محوری استدلال در یادگیری تأکید کرده اند. پرداختن نظام مند به فرایند استدلال، یادگیری عمیق تر مفاهیم و توانمندسازی دانش آموزان برای مواجهه با موقعیت های جدید، تسهیل می کند (گویا، ۱۳۹۱؛ ناردی^۳، ۲۰۲۵). بر همین اساس، حنا^۴ و همکاران (۲۰۲۰) با تأکید بر نقش استدلال در ارتقای درک و فهم ریاضی، بر جایگاه آن به عنوان مؤلفه ای جدایی ناپذیر از برنامه درسی ریاضی، تأکید کرده اند.

اهمیت این موضوع در اسناد سیاست گذاری آموزشی نیز مورد تأکید قرار گرفته است. در «برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران»، فرایندهایی همچون حل مسئله، مدل سازی، تعمیم منطقی، آزمون فرضیه، تصمیم گیری و گفتن ریاضیاتی، همگی ذیل مقوله استدلال تعریف شده و به عنوان مؤلفه های کلیدی یادگیری ریاضی معرفی شده اند (شورای ملی آموزش، ۱۳۹۱). این رویکرد با توصیه های «شورای ملی معلمان ریاضی^۵» در ایالات متحده آمریکا و کانادا (۲۰۰۰) نیز هم سو است که بر پرورش توانایی تحلیل مسائل، ارائه استدلال های منطقی و پیوند استدلال با یادگیری مفهومی تأکید دارد. از دیدگاه این شورا، تأکید بر استدلال به دانش آموزان کمک می کند تا به جای حفظ و تکرار الگوریتم ها، فهم عمیق تری از مفاهیم ریاضی کسب کنند و توانایی انتقال و به کارگیری آموخته های خود در موقعیت های جدید را توسعه دهند (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰).

اهمیت استدلال در پژوهش های آموزش ریاضی از منظرهای دیگری همچون شناختی، اجتماعی و تربیتی نیز مورد توجه قرار گرفته است. از دیدگاه شناختی، استدلال ریاضی یک فعالیت ذهنی پویا و تعاملی است که بر دانش پیشین و تجربه های فرد تکیه دارد و فراتر از اجرای قواعد منطقی عمل می کند (لپور^۶، ۲۰۲۴). پژوهش ها نشان می دهند که استدلال زمانی معتبر است که فرد بتواند میان بازنمایی های مختلف، ارتباط برقرار کند و از فرایندهای شناختی و فراشناختی برای سازمان دهی دانش بهره بگیرد (بوئرو^۷ و همکاران، ۱۹۹۹؛ جانسون^۸ و همکاران، ۲۰۲۰). از منظر گفتمانی-اجتماعی^۹، استدلال شامل فعالیت هایی است که در بستر تعاملات جمعی و بر اساس هنجارهای اجتماعی-ریاضی شکل می گیرد (اسفارد^{۱۰}، ۲۰۰۸؛ تولمین، ۱۹۵۸؛ بالاجف، ۲۰۱۳؛

¹ Argumentation

² Stylianides

³ Nardi

⁴ Hanna

⁵ National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

⁶ Lepore

⁷ Boero

⁸ Jonsson

⁹ Socio-discursive

¹⁰ Sfard

آلمپانی^{۱۱} و استفاناس^{۱۲}، ۲۰۲۳). از جنبه آموزشی نیز، استدلال و اثبات به مثابه اهداف بنیادین آموزش ریاضی، نقشی فراتر از تأیید صحت گزاره‌ها دارند و زمینه‌ساز پرورش تفکر تحلیلی، نقدپذیری و توانایی اقناع متقابل می‌شوند (تال^{۱۳}، ۱۳۸۵).

با وجود این تأکیده‌ها، پژوهش‌های متعددی نشان می‌دهند که دانش‌آموزان در درک فرایندهای استدلالی و گذار از استدلال‌های شهودی، تجربی و استقرایی به اثبات‌های استنتاجی و رسمی با چالش‌های جدی مواجه هستند (احمدپور، ۱۴۰۲؛ کویچو^{۱۴} و زازکیس، ۲۰۱۳؛ قوسینی^{۱۵} و هربست^{۱۶}، ۲۰۱۶؛ وبر^{۱۷} و مژیا-راموس^{۱۸}، ۲۰۱۴). نتایج مطالعه تیمز ۲۰۲۳ نیز نشان می‌دهد تنها حدود ۷ درصد از دانش‌آموزان پایه هشتم به سطحی از استدلالی نزدیک به استدلال رسمی دست یافته‌اند، در حالی که اکثریت آن‌ها به استدلال‌های شهودی و مبتنی بر بازنمایی‌های تصویری تکیه می‌کنند (ون داور^{۱۹} و همکاران، ۲۰۲۴؛ رینولدز^{۲۰} و همکاران، ۲۰۲۴).

نظر به اهمیت و پیچیدگی فرایند استدلال در ریاضیات، و به منظور پاسخ‌گویی به چالش‌های موجود در فهم و تحلیل آن، پژوهش‌هایی به طور خاص به بررسی این فرایند و شناسایی ساختار آن پرداخته‌اند (بالاچف، ۲۰۱۳؛ پدمونته^{۲۱} و بالاچف، ۲۰۱۶؛ تولمین، ۱۹۵۸). مدل ساختار استدلال تولمین (۱۹۵۸) با معرفی مؤلفه‌هایی چون داده^{۲۲}، ادعا، توجیه، پشتوانه، میزان اعتبار و شرایط ابطال، ابزاری منسجم برای تحلیل ساختار استدلال فراهم می‌آورد. در مقابل، مدل ادراکی بالاچف (۲۰۱۳) با تکیه بر مؤلفه‌هایی همچون مجموعه مسائل^{۲۳}، عملگر^{۲۴}، نظام بازنمایی^{۲۵} و ساختار کنترل^{۲۶}، بسترهای ادراکی، شناختی و تعاملی استدلال را برجسته می‌کند. پدمونته و بالاچف (۲۰۱۶) با ترکیب این دو رویکرد نشان داده‌اند که تلفیق دیدگاه ساختاری تولمین و دیدگاه ادراکی بالاچف می‌تواند تصویر کامل‌تری از ساختار استدلال ریاضی یادگیرندگان ارائه دهد و حرکت آن‌ها را به سوی اثبات، روشن‌تر سازد (پدمونته و بالاچف، ۲۰۱۶؛ فیالو^{۲۷} و گوتیرز^{۲۸}، ۲۰۱۷؛ سیاهار^{۲۹}، ۲۰۲۶).

با وجود گسترش این‌گونه پژوهش‌ها در سطح بین‌المللی، همچنان، نحوه تعامل و ارتباط میان مؤلفه‌های این مدل‌ها در اغلب این پژوهش‌ها به طور شفاف تبیین نشده است. همچنین، تعداد پژوهش‌های انجام‌شده در این زمینه، محدود بوده و شواهد کافی

¹¹ Almpani

¹² Stefaneas

¹³ Tall

¹⁴ Koichu

¹⁵ Ghouseini

¹⁶ Herbst

¹⁷ Weber

¹⁸ Mejía-Ramos

¹⁹ Von Davier

²⁰ Reynolds

²¹ Pedemonte

²² Data

²³ Set of Problems

²⁴ Operators

²⁵ Representation System

²⁶ Control Structure

²⁷ Fiallo

²⁸ Gutiérrez

²⁹ Syahar

برای تبیین ابعاد مختلف استدلال دانش‌آموزان، فراهم نشده است. در ایران نیز، مطالعات اندکی به تحلیل دقیق مؤلفه‌های استدلال دانش‌آموزان با استفاده از مدل‌های نظام‌مند، به‌ویژه مدل‌های تولمین و بالاچف، پرداخته‌اند. پژوهش‌های داخلی بیش‌تر بر اهمیت کلی استدلال و اثبات تأکید کرده‌اند و کمتر به تحلیل ساختار استدلال در بافت‌های مسئله‌محور و به‌کارگیری چارچوب‌های تلفیقی برای شناسایی ساختار و مؤلفه‌های سازنده استدلال توجه شده است. این خلأ پژوهشی، به‌ویژه در زمینه آموزش هندسه در ایران، ضرورت بهره‌گیری از مدل تلفیقی استدلال تولمین و مدل ادراکی بالاچف را برای تحلیل ساختار استدلال دانش‌آموزان در حل مسائل هندسی، توجیه می‌کند.

پژوهش حاضر با بهره‌گیری از مدل تلفیقی تولمین-بالاچف در پی تحلیل ساختار استدلال هندسی دانش‌آموزان، شناسایی مؤلفه‌های آن و تبیین ارتباط میان این مؤلفه‌ها در فرایند حل مسئله بود. انتظار می‌رود نتایج این پژوهش، ضمن تعمیق شناخت از سازوکارهای استدلالی دانش‌آموزان، شواهدی برای بهبود آموزش استدلال و اثبات و نیز طراحی و بازنگری برنامه‌های درسی ریاضی فراهم آورد.

پیشینه پژوهش

پژوهش‌های مرتبط با استدلال ریاضی، به‌ویژه در هندسه، از دیدگاه‌ها و رویکردهای نظری گوناگونی بهره گرفته‌اند که هر یک، بر جنبه‌ای خاص از رشد و شکل‌گیری یا ساختار استدلال تمرکز دارند. در این میان، نظریه فن هیلی^{۳۰} (۱۹۸۶) با معرفی سطوح پنج‌گانه تفکر هندسی، یکی از اثرگذارترین رویکردها در توضیح مسیر تدریجی رشد تفکر هندسی است. مسیری که از سطح تجسمی و تحلیلی آغاز می‌شود و پس از گذر از استنتاج غیررسمی، به استنتاج رسمی می‌رسد. پژوهش‌های اخیر نیز نشان داده‌اند که توانایی استدلال و اثبات با سطح درک ساختارهای هندسی و هماهنگی میان محتوای آموزشی و سطح شناختی یادگیرنده ارتباط دارد (سبزی‌علی و همکاران، ۲۰۲۰؛ صفابخش چکوسری و همکاران، ۲۰۱۸).

دووال^{۳۱} (۱۹۹۸)، از منظر شناختی، تبیین متفاوتی از استدلال هندسی ارائه کرد. او میان استدلال گفتمانی مبتنی بر زبان طبیعی و شهود و استدلال نظری یا اثبات مبتنی بر نظام‌های صوری، تمایز قائل شد. این تفاوت نشان‌دهنده نوعی گسست شناختی^{۳۲} در گذار دانش‌آموزان از توضیح‌های غیررسمی به اثبات‌های معتبر است (دووال، ۱۹۹۸؛ پینوفان^{۳۳} و همکاران، ۲۰۲۴). از این منظر، دیدگاه دووال امکان بررسی چگونگی گذار دانش‌آموزان از استدلال‌های شهودی به استدلال‌های نظری و استنتاجی را فراهم می‌کند. ازسوی دیگر، گاروتی^{۳۴} و همکاران (۱۹۹۶)، با ارائه نظریه وحدت شناختی، بر پیوستگی میان استدلال‌های غیررسمی و اثبات‌های رسمی تأکید کردند. بر اساس این نظریه، اثبات در ریاضیات، مرحله‌ای جدا از فرایند استدلال نیست بلکه، ادامه منسجم و صوری همان استدلال‌های اولیه دانش‌آموز است. این رویکرد امکان تحلیل پیوستگی یا گسست بین استدلال غیررسمی و استنتاج رسمی را فراهم می‌سازد.

³⁰ Van Hiele

³¹ Duval

³² Cognitive Rupture

³³ Pino-fan

³⁴ Garuti

در کنار این رویکردهای نظری که بیشتر به ماهیت، رشد و گذارهای شناختی در استدلال هندسی می‌پردازند، برخی پژوهش‌ها به طور مستقیم، فرایند تولید و سازمان‌دهی اثبات‌های ریاضی را بررسی کرده‌اند. به عنوان مثال، غلام‌آزاد و همکاران (۲۰۰۳) با بررسی تلاش دانشجومعلم‌ان برای ارائه اثبات‌های کوتاه نشان دادند که خطاهای موجود در اثبات‌ها صرفاً به نتیجه‌نهایی محدود نمی‌شوند، بلکه می‌توانند در نحوه سازمان‌دهی داده‌ها، برقراری روابط منطقی بین گزاره‌ها و پیوند میان ادعا و توجیه شکل گیرند. این یافته‌ها اهمیت تحلیل ساختار درونی استدلال و شناسایی مؤلفه‌های تشکیل‌دهنده آن را در مطالعه استدلال ریاضی برجسته می‌سازد.

برای تحلیل نظام‌مند ساختار استدلال، چارچوب‌های مختلفی پیشنهاد شده‌اند. یکی از شناخته‌شده‌ترین آن‌ها، مدل استدلال تولمین (۲۰۰۳) است که امروزه یکی از مهم‌ترین چارچوب‌های تحلیل استدلال به شمار می‌رود. این مدل با تمایز گذاشتن بین سه مؤلفه اصلی استدلال یعنی داده، ادعا و توجیه و مؤلفه‌های تکمیلی آن که پشتوانه و میزان اعتبار و شرایط ابطال است، امکان تحلیل نحوه پیوند میان شواهد و نتیجه را فراهم می‌سازد. بالاچف (۲۰۱۳)، از سوی دیگر، مدلی ارائه داد که با تأکید بر مؤلفه‌هایی مانند عملگر، بازنمایی و کنترل، بُعد ادراکی استدلال را برجسته می‌کند و نشان می‌دهد که استدلال ریاضی، به شیوه پردازش ذهنی و نوع بازنمایی و سازوکارهای کنترلی یادگیرنده وابسته است.

برخی پژوهشگران (پدمونته و بالاچف، ۲۰۱۶؛ رودریگونیتهو^{۳۵} و همکاران، ۲۰۲۳) با به کارگیری جداگانه دو مدل تولمین و بالاچف نشان داده‌اند که هیچ‌یک از این دو مدل به تنهایی، قادر به تبیین همه جنبه‌های فرایند و ساختار استدلال دانش‌آموزان نبوده‌اند. به همین دلیل، پدمونته و بالاچف (۲۰۱۶) در پژوهش خود این دو مدل را در قالب یک چارچوب تلفیقی به کار گرفتند تا پیوند بین ساختار منطقی استدلال و فرایندهای شناختی روشن‌تر شود و تحلیل جامع‌تری از پاسخ‌های دانش‌آموزان در مسائل هندسی فراهم آید. در این مدل، داده‌ها، توجیه‌ها و پشتوانه‌ها در کنار بازنمایی‌ها، عملگرها و کنترل قرار می‌گیرند و ساختاری یکپارچه ایجاد می‌کنند که امکان تحلیل عمیق‌تر استدلال دانش‌آموزان را فراهم می‌سازد.

پژوهش‌های اخیر نیز نظیر فیالو و گوتیرز (۲۰۱۷) و باک^{۳۶} و دیمل^{۳۷} (۲۰۲۱)، با بهره‌گیری از مدل تلفیقی و با توجه هم‌زمان به کیفیت استنتاج و شیوه‌های بازنمایی و توجیه، به تحلیل فرایندهای استدلال دانش‌آموزان پرداخته‌اند. یافته‌های فیالو و گوتیرز (۲۰۱۷) حاکی از وجود گسست‌های ساختاری میان مؤلفه‌های استدلال از جمله فاصله بین داده و توجیه، فقدان پشتوانه‌های نظری صریح و دشواری در انتقال از شهود به اثبات استنتاجی است. همچنین، آن‌ها ضعف در کنترل شناختی را برای ارزیابی اعتبار مسیر استدلال، از دیگر ویژگی‌های این نوع استدلال‌های ناقص برمی‌شمارند. افزون بر این‌ها، باک و دیمل (۲۰۲۱) با بهره‌گیری از مدل تلفیقی تولمین و بالاچف (۲۰۱۶) نشان دادند که به کارگیری بازنمایی‌های فضایی، می‌تواند استدلال دانشجومعلم‌ان را در اشکال سه‌بعدی، غنی‌تر کند. یافته‌های آن‌ها آشکار کرد که تجربه فضایی و تغییر زاویه دید، مسیر حرکت از مشاهده به ادعا و سپس به استدلال استنتاجی مناسب را در استدلال هندسی، تقویت می‌کند.

³⁵ Rodríguez-Nieto

³⁶ Bock

³⁷ Dimmel

در ایران نیز پژوهش‌های متعددی به بررسی استدلال ریاضی پرداخته‌اند که هرچند از منظرها و با اهداف متفاوتی انجام شده‌اند، عمدتاً بر موضوعاتی مانند درک دانش‌آموزان و دانشجویان از استدلال و اثبات، ارزیابی کیفیت استدلال، توانایی‌های استدلالی و جایگاه استدلال در محتوای درسی تمرکز داشته‌اند. برای نمونه، ریحانی و همکاران (۱۳۹۵) با بهره‌گیری از مدل مژیا-راموس نشان دادند که بسیاری از دانشجویان در درک ساختار منطقی اثبات و روابط میان گزاره‌های آن با دشواری مواجه‌اند و این ضعف در کیفیت استدلال‌های آنان بازتاب می‌یابد. در پژوهشی دیگر، یافتیان و انصاری (۱۳۹۹) به این نتیجه رسیدند که بسیاری از دانش‌آموزان در ارزیابی استدلال‌های ریاضی دچار مشکل‌اند و اغلب به‌جای محتوای استدلال، به ظاهر صوری آن توجه می‌کنند. همچنین نتایج پژوهش یافتیان و پازوکی (۱۴۰۰) معلوم کرد که عملکرد دانش‌آموزان در مؤلفه‌های استدلالی و عملیاتی به‌مراتب ضعیف‌تر از ابعاد ادراکی و اجرای الگوریتم است.

از این‌ها گذشته، کلاهدوز (۱۳۹۰) در پژوهش خود، تفاوت نوع استدلال‌های دانش‌آموزان را بررسی کرد و به این نتیجه رسید که دختران، بیشتر از استدلال روایتی و پسران بیشتر از استدلال تجربی استفاده می‌کنند. احمدپور و همکاران (۱۳۹۶) نیز با تحلیل محتوای کتاب‌های درسی ریاضی ایران دریافتند که بیشترین فراوانی استدلال‌ها، به‌ویژه استدلال استنتاجی، در مباحث هندسه مشاهده می‌شود، درحالی‌که در مباحث آمار و احتمال، این فراوانی به‌مراتب کمتر است.

بااین‌حال، با بررسی پیشینه پژوهش معلوم شد که تاکنون پژوهشی در ایران، به تحلیل ساختار استدلال ریاضی دانش‌آموزان بر اساس مدل تولمین، مدل بالاف یا مدل تلفیقی تولمین-بالاف نپرداخته است. اگرچه در برخی پژوهش‌های داخلی، از مدل تولمین به‌تنهایی، برای تحلیل ساختار استدلال در حوزه‌هایی مانند مطالعات حقوقی (جعفری تبار، ۲۰۱۹)، زبان‌شناسی (عرب یوسف‌آبادی، ۱۴۰۴) و آموزش زبان انگلیسی (ساسانی و همکاران، ۱۴۰۴) استفاده شده است، اما بهره‌گیری از این مدل در پژوهش‌های آموزش ریاضی، مشاهده نشده است.

مبانی نظری

در این بخش، ابتدا انواع استدلال مطرح‌شده در پژوهش‌های قبلی بررسی می‌شود، سپس مؤلفه‌های مدل تلفیقی تولمین-بالاف تبیین می‌گردد تا بنیان مفهومی لازم برای تحلیل فرایند استدلال دانش‌آموزان در حل مسئله هندسه، فراهم شود.

استدلال

مفهوم استدلال، یکی از بنیادی‌ترین مؤلفه‌ها در آموزش ریاضی است و به دلیل نقش آن در فهم و درک، حل مسئله و تولید دانش، از جنبه‌های مختلف موردتوجه پژوهشگران قرار گرفته است. یکی از مهم‌ترین این جنبه‌ها، بررسی انواع استدلال است. پژوهشگران آموزش ریاضی طبقه‌بندی‌های متعددی برای انواع استدلال ارائه کرده‌اند تا الگوهای رایج استدلالی در فعالیت‌های ریاضی روشن‌تر شود. باتوجه‌به گستردگی طبقه‌بندی‌ها، این بخش تنها به بررسی پژوهش‌هایی می‌پردازد که از نظر مفهومی به چارچوب پژوهش حاضر نزدیک‌تر هستند.

فن‌هیلی (۱۹۵۷-۱۹۸۶) در نظریه تفکر هندسی خود، در میان سطوح مختلف تفکر هندسی، دو سطح مرتبط با استدلال استنتاجی، یعنی استدلال غیررسمی^{۳۸} و رسمی^{۳۹} را معرفی کرد. استدلال استنتاجی غیررسمی، به برقراری ارتباط میان ویژگی‌های اشکال و ارائه دلایل غیررسمی در حل مسائل هندسی اشاره دارد و استدلال استنتاجی رسمی، توانایی ارائه برهان‌های منطقی بر اساس اصول و قضایای پذیرفته‌شده است.

در همین راستا، پدمونته (۲۰۰۱)، سه نوع استدلال را در بررسی فرایند حل مسئله هندسی شامل استدلال استقرایی^{۴۰}، استدلال تحقیقی-استنتاجی^{۴۱} و استدلال استنتاجی^{۴۲} شناسایی کرد. در استدلال استقرایی فرد با مشاهده و تحلیل مجموعه‌ای از موارد خاص و الگوها یا روابط تکرارشونده، به ساخت یک تعمیم کلی دست می‌زند. این نوع استدلال بر پایه شواهد محدود بنا شده و اعتبار آن نسبی است، زیرا همواره امکان نقض آن با ارائه یک مثال، وجود دارد. استدلال استنتاجی بر پایه اصول، قوانین و روابط پذیرفته‌شده ریاضی شکل می‌گیرد و فرد از مقدمات معلوم، به نتیجه‌ای منطقی و معتبر می‌رسد. بنابراین، از منظر اعتبار منطقی، این نوع استدلال از استحکام بیشتری برخوردار است. در استدلال تحقیقی-استنتاجی، فرد بر اساس شواهد، ادعا یا فرضیه‌ای محتمل و عقلانی را برای یک مسئله مطرح می‌کند و می‌کوشد آن را با اتکا به قواعد و اصول ریاضی ارزیابی و تأیید یا رد می‌کند (پدمونته، ۲۰۰۱).

سوکران^{۴۳} و همکاران (۲۰۱۷) نیز با تکیه بر نوع بازنمایی غالب در استدلال‌های دانش‌آموزان، استدلال ریاضی را به چهار نوع استدلال استقرایی، استدلال جبری^{۴۴}، استدلال دیداری^{۴۵} و استدلال ادراکی^{۴۶} تقسیم کردند. آن‌ها توضیح دادند که استدلال استقرایی بر تعمیم چند مورد خاص استوار است، در حالی که استدلال جبری بر بازنمایی‌های نمادین و بررسی حالت کلی استوار است. همچنین، استدلال دیداری بر ویژگی‌ها و روابط موجود در تصاویر و شکل‌های هندسی تکیه دارد و استدلال ادراکی بر موقعیت‌ها یا تجربه‌های آشنای فرد مبتنی است.

فیالو و گوتیرز (۲۰۱۷)، استدلال را به دو دسته وسیع‌تر تجربی و استنتاجی قرار دادند. از نظر آنان، استدلال‌های متکی بر مشاهده، آزمایش و تجربه مستقیم، از نوع استدلال تجربی هستند که از داده‌های عینی برای رسیدن به نتیجه، بهره می‌گیرند. درحالی‌که استدلال استنتاجی، بر زنجیره‌ای از روابط منطقی استوار است که ممکن است به صورت اثبات ریاضی بیان شود یا حتی در قالبی غیررسمی اما منسجم ظاهر گردد.

³⁸ Informal

³⁹ Formal

⁴⁰ Inductive Argumentation

⁴¹ Abductive Argumentation

⁴² Deductive Argumentation

⁴³ Sukirwan

⁴⁴ Algebraic Argumentation

⁴⁵ Visual Argumentation

⁴⁶ Perceptual Argumentation

مدل تلفیقی تولمین-بالاچف

مدل تولمین، یکی از مهم‌ترین ابزارهای تحلیل استدلال به شمار می‌آید و به سبب ساختار تحلیلی که دارد، امکان بازسازی و توصیف مؤلفه‌های مختلف استدلال را فراهم می‌کند. با این حال، این مدل در بازنمایی کامل فرایندهای استدلال، به‌ویژه در بافت‌های آموزشی مانند کلاس درس ریاضی، با محدودیت‌هایی روبه‌روست. یکی از نقدهای اساسی وارد بر مدل تولمین آن است که این مدل نمی‌تواند به طور کامل، بسط دانشی، مفروضات پنهان و پیش‌دانش‌های شرکت‌کنندگان را در فرایند استدلال، نمایش دهد (پدمونته و بالاچف، ۲۰۱۶). به همین دلیل پدمونته و بالاچف (۲۰۱۶)، با تلفیق این مدل با مدل بالاچف (۲۰۱۳) مدلی ارائه دادند تا بتوانند حل مسئله‌های هندسه توسط دانش‌آموزان را به کمک مؤلفه‌های کلیدی در ساختار استدلال آنان، با دقت بیشتری توصیف نموده و امکان تحلیل جامع‌تری از این ساختار را فراهم آورند. این مدل، از یک سو روابط میان داده، توجیه و پشتوانه را روشن می‌کند و از سوی دیگر، با افزودن مؤلفه‌های ادراکی و کنترلی، امکان فهم دقیق‌تر فرایند استدلال در موقعیت‌های آموزشی را به پژوهشگر می‌دهد. در ادامه، مؤلفه‌های مدل تلفیقی تولمین-بالاچف بر اساس تعریف‌های ارائه‌شده (تولمین، ۲۰۰۳؛ پدمونته، ۲۰۰۷؛ بالاچف، ۲۰۱۳؛ پدمونته و بالاچف، ۲۰۱۶) معرفی می‌شوند. با توجه به این که مبنای تحلیل استدلال دانش‌آموزان در پژوهش حاضر، مدل تلفیقی مبتنی بر این تعریف‌ها است، به مؤلفه‌های آن با تفصیل بیشتری پرداخته می‌شود.

«داده^{۴۷}»، به آن دسته از اطلاعاتی اطلاق می‌شود که دانش‌آموز برای پشتیبانی از ادعای خود به کار می‌گیرد. این اطلاعات می‌تواند مستقیماً از متن مسئله استخراج شوند یا از نتایج بخش‌های پیشین مسئله به دست آیند.

«ادعا^{۴۸}»، گزاره‌ای است که موضع^{۴۹} فرد را در یک استدلال بیان می‌کند و نشان‌دهنده نتیجه یا نظر او درباره موضوع مورد بحث است. در واقع، ادعا همان نقطه آغاز استدلال است که سایر اجزای استدلال برای پشتیبانی یا تبیین آن به کار گرفته می‌شوند.

«توجیه^{۵۰}»، قاعده یا اصلی کلی است که نشان می‌دهد چرا و چگونه داده‌ها می‌توانند آن ادعا را تأیید کنند. این مؤلفه در واقع همان بخش از استدلال دانش‌آموز است که پیوند میان داده و ادعا را برقرار می‌سازد و توضیح می‌دهد بر اساس چه قاعده یا منطقی، داده‌ها به ادعا مرتبط می‌شوند.

«پشتوانه^{۵۱}»، به قواعد، تعریف‌ها یا اصولی اشاره دارد که برای تقویت اعتبار توجیه به کار گرفته می‌شوند. این مؤلفه زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که توجیه ارائه‌شده، به‌تنهایی کافی نباشد و ارجاع به مبانی صریح‌تری مانند تعریف‌های ریاضی، قضایای پذیرفته‌شده یا اصول منطقی، لازم است. پشتوانه روشن می‌سازد که «چرا» یک توجیه قابل قبول است، حتی اگر به طور مستقیم در ظاهر استدلال بیان نشده باشد. این مؤلفه ممکن است ریشه در دانش رسمی، تجربه عملی یا شهود داشته باشد.

⁴⁷ Data

⁴⁸ Claim

⁴⁹ Standpoint

⁵⁰ Warrant

⁵¹ Backing

«میزان اعتبار^{۵۲}»، مشخص می‌کند یک ادعا تا چه حد قطعی، محتمل یا مشروط است و معمولاً با عباراتی مانند «احتمالاً»، «حتماً»، یا «ممکن است» در بیان استدلال ظاهر می‌شود.

«شرایط ابطال^{۵۳}»، به موقعیت‌ها یا شرایطی اشاره دارد که در صورت وجود، می‌توانند اعتبار ادعا را زیر سؤال ببرند، حتی اگر داده‌ها و توجیه ارائه‌شده، معتبر باشند.

«عملگر^{۵۴}»، به مجموعه‌ای از فرمول‌ها، قواعد نوشتاری، روابط منطقی مانند اگر-آن‌گاه، محاسبات عددی و ترسیم اشکال هندسی اطلاق می‌شود که یادگیرنده برای پیشبرد استدلال از آن‌ها استفاده می‌کند.

«نظام‌بازنمایی^{۵۵}»، به مجموعه‌ای از نمادها، شیوه‌ها و ساختارهایی اطلاق می‌شود که از طریق آن‌ها، داده‌ها و مفاهیم و فرایندهای ریاضی سازمان‌دهی، بیان و منتقل می‌شوند. بازنمایی‌ها می‌توانند به صورت نوشتاری، عددی، جبری، تصویری، نموداری، ترسیمی یا گفتاری ظاهر شوند.

«ساختار کنترل^{۵۶}»، سازوکارهای ارزیابی، تصمیم‌گیری و اصلاح مسیر است. ترکیب این مؤلفه‌های فراشناختی امکان بازسازی منطق درونی ادراک‌های دانش‌آموز را فراهم می‌سازد.

نمای کلی این مدل، در تصویر ۱ قابل مشاهده است.

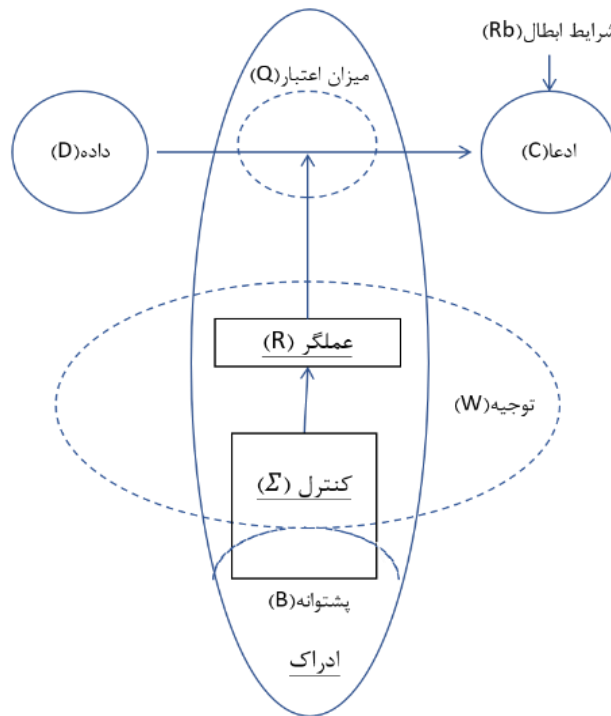
⁵² Qualifier

⁵³ Rebuttal

⁵⁴ Operator

⁵⁵ Representation System

⁵⁶ Control Structure



تصویر ۱: بازنمایی مدل تلفیقی تولمین و بالاچف (برگرفته از پدمونته و بالاچف (۲۰۱۶))

روش‌شناسی

این پژوهش باهدف تحلیل ساختار استدلال دانش‌آموزان در حل مسائل هندسی و در چارچوب تلفیقی مدل‌های تولمین (۱۹۵۸) و بالاچف (۲۰۱۳) انجام شده است. برای بررسی عمیق و همه‌جانبه کیفیت استدلال‌ها، رویکرد کیفی به کار گرفته شد تا امکان تحلیل لایه‌های مختلف فرایند استدلال را فراهم کند (کرسول^{۵۷}، ۲۰۱۴). تحلیل داده‌ها با تمرکز بر شناسایی مؤلفه‌های استدلال و بر اساس رویکرد بازسازی استدلال (بیکنر-آهسباس^{۵۸} و پردیگر^{۵۹}، ۲۰۱۶) صورت گرفت.

شرکت‌کنندگان در این پژوهش، سه گروه سه‌نفری از دانش‌آموزان دختر پایه یازدهم رشته علوم انسانی بودند که در سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۴ در یک مدرسه دولتی در یکی از شهرستان‌های استان تهران تحصیل می‌کردند و داوطلب شرکت در این مطالعه بودند. انتخاب پایه یازدهم و رشته علوم انسانی باتوجه به جایگاه مباحث هندسه در برنامه درسی و نقش دوره دوم متوسطه در شکل‌گیری بنیان‌های تفکر استدلالی بود.

ابزار اصلی گردآوری داده‌ها، مجموعه‌ای از مسائل هندسی بود. پس از بررسی مسائل به‌کاررفته در پژوهش‌های پیشین (پدمونته و بالاچف، ۲۰۱۶؛ ویلسون^{۶۰}، ۲۰۰۹) و مسائل موجود در کتاب درسی هندسه ۱ پایه دهم رشته ریاضی و فیزیک (سازمان پژوهش و

⁵⁷ Creswell

⁵⁸ Bikner-Ahsbahs

⁵⁹ Prediger

⁶⁰ Wilson

برنامه‌ریزی آموزشی، ۱۴۰۴)، تعدادی مسئله با اقتباس از این منابع و با توجه به اهداف پژوهش انتخاب و متناسب با ملاک‌های تعیین‌شده، تعدیل شدند. از میان مسائل گردآوری‌شده، در نهایت ۱۰ مسئله برای بررسی اولیه انتخاب شد. این مسائل طی یک فرایند چندمرحله‌ای توسط دو متخصص آموزش ریاضی و دو معلم باتجربه هندسه بررسی و بازبینی شدند. بازخوردهای این چهار نفر درباره سطح دشواری، وضوح صورت سؤال، میزان درگیرکنندگی و ظرفیت مسئله‌ها برای ایجاد زمینه استدلالی، نقش مهمی در بازنگری و اعتباربخشی به مسائل داشت.

مجموعه این مسائل، در یک اجرای آزمایشی محدود در کلاس دیگری مورد استفاده قرار گرفت تا مشکلات احتمالی اجرایی و تفسیری آشکار شود. در نهایت، چهار مسئله انتخاب شدند (پیوست الف) که از نظر محتوا و ساختار، بیشترین ظرفیت را برای بروز انواع استدلال‌ها و امکان شکل‌گیری توجیه‌های متنوع فراهم می‌کردند. از چهار مسئله، سه مسئله برای بخش انفرادی در نظر گرفته شد تا شیوه‌های حل و الگوهای استدلال هر دانش‌آموز به‌طور مستقل بررسی و امکان دسته‌بندی آن‌ها بر اساس شباهت ساختاری در استدلال فراهم شود. مسئله چهارم نیز برای بخش گروهی به کار رفت تا ساختار استدلال دانش‌آموزان در بستر تعامل و گفت‌وگو، تحلیل شود.

داده‌های پژوهش از سه منبع مکمل گردآوری شد تا تصویر نسبتاً کاملی از استدلال دانش‌آموزان به دست آید. نخست، کاربرگ‌های نوشتاری دانش‌آموزان در حل مسائل شامل ترسیم‌ها، یادداشت‌ها و توضیح‌های مکتوب، جمع‌آوری شد. سپس، فرایند کارگروهی دانش‌آموزان در کلاس به‌طور مستقیم مشاهده و نکات مهم در قالب یادداشت‌های میدانی ثبت شد. همچنین، تمام جلسات کارگروهی با استفاده از دوربین فیلم‌برداری و دستگاه ضبط‌صوت ثبت شد تا امکان بازبینی، توقف و بازتحلیل دقیق گفت‌وگوها، پرسش‌ها، مخالفت‌ها و دفاع‌ها فراهم شود. این کار، با اجازه شرکت کنندگان انجام شد.

پس از پایان گردآوری داده‌ها، فایل‌های صوتی و تصویری جلسات به‌طور کامل پیاده‌سازی و متن حاصل با کاربرگ‌ها و یادداشت‌های میدانی تطبیق داده شد. سپس، متن‌های پیاده‌شده باتکیه بر چارچوب تلفیقی تولمین-بالاچف تحلیل شدند. برای اطمینان از اعتبار تحلیل‌ها، چند راهبرد مکمل به کار گرفته شد. نخست، یافته‌های حاصل از تحلیل گفت‌وگوها، با شواهد موجود در کاربرگ‌های نوشتاری، مشاهدات و فیلم‌های ضبط‌شده مقایسه شد تا تفسیرها تنها بر یک منبع داده، متکی نباشند. سپس متن پیاده‌سازی شده گفت‌وگوهای دانش‌آموزان و پاسخ‌های کتبی آنان، در اختیار یک متخصص آموزش ریاضی قرار گرفت تا به‌طور مستقل مؤلفه‌های ساختار استدلال را شناسایی و کدگذاری کند. میزان توافق میان دو کدگذار بر اساس درصد توافق مستقیم (کریپندورف^{۶۱}، ۲۰۰۴) برابر با ۸۰ درصد محاسبه شد که نشان‌دهنده ثبات مناسب در شناسایی مؤلفه‌های مدل تولمین-بالاچف است.

یافته‌ها

در این بخش، نتایج تجزیه و تحلیل داده‌های گردآوری‌شده، ارائه می‌شود. پس از بررسی پاسخ دانش‌آموزان به سه مسئله اولیه و دسته‌بندی آن‌ها در گروه‌هایی با عملکرد مشابه بر اساس نوع استدلال و راهبردهای به‌کاررفته و پاسخ و تعاملات گروهی آن‌ها به مسئله اصلی هندسه، بررسی و تحلیل شدند. هدف اصلی از این تحلیل، تشخیص و بررسی دقیق مؤلفه‌های مدل تلفیقی تولمین-

⁶¹ Krippendorff

بالاچف و ارتباط میان آن‌ها، در استدلال هر گروه از دانش‌آموزان بود. در این تحلیل، ابتدا محتوای گفت‌وگوها و استدلال‌های دانش‌آموزان از روی فیلم‌ها و یادداشت‌های میدانی پیاده‌سازی و شفاف‌سازی شد. سپس در متن نوشتاری، مؤلفه‌های مدل تلفیقی تولمین-بالاچف شناسایی شدند (پیوست ب). در ادامه، فرایند استدلال هر گروه به صورت گام‌به‌گام تحلیل و تبیین گشت و خلاصه آن در قالب یک تصویر بازنمایی گردید. در پایان، تحلیل یکپارچه‌ای ارائه شد که نشان می‌دهد مؤلفه‌ها، چگونه در کنار هم ساختار استدلالی هر گروه را شکل دادند.

در این بخش به اجمال، تحلیل یکپارچه فرایند استدلال هر گروه به همراه بازنمایی تصویری آن، برای مسئله اصلی زیر، ارائه می‌شود.

الف) با ضلع داده شده AB ، ابتدا دایره‌ای رسم می‌کنیم که AB قطر آن باشد. AB را به دو قسمت مساوی CB و AC تقسیم می‌کنیم. سپس دو دایره با قطرهای AC و CB رسم می‌کنیم. به همین ترتیب، AC و CB را نصف کرده و دایره‌هایی به قطر این اندازه‌ها رسم می‌کنیم. مساحت هر دایره در هر مرحله، با مساحت دایره اولیه چه نسبتی (ارتباطی) دارد؟

تحلیل فرایند استدلال دانش‌آموزان گروه ۱

در این گروه، داده مسئله مبنای کارشان قرار گرفت و دانش‌آموزان برای شروع، بر این اساس ادعایی مطرح کردند. در ادامه و پس از انجام محاسبات، این ادعا مورد بازنگری قرار گرفت و استدلال به سمت ادعایی دیگر هدایت شد. این تغییر نشان می‌دهد که استدلال دانش‌آموزان از یک برداشت اولیه و شهودی آغاز شد، اما در مواجهه با محاسبه و ارزیابی مجدد، به سمت یک نتیجه دقیق‌تر و معتبرتر حرکت کرد. در این فرایند، توجیه‌ها مانند پلی، داده‌ها و ادعا را به یکدیگر متصل کردند، اما آن‌ها به دلیل ناسازگاری ادعای اولیه با نتیجه عددی، دستخوش تردید شدند. بنابراین، شرایط ابطال در این گروه، به صورت یک سازوکار اصلاحی عمل کرد و دانش‌آموزان را به بازاندیشی در پاسخ اولیه واداشت.

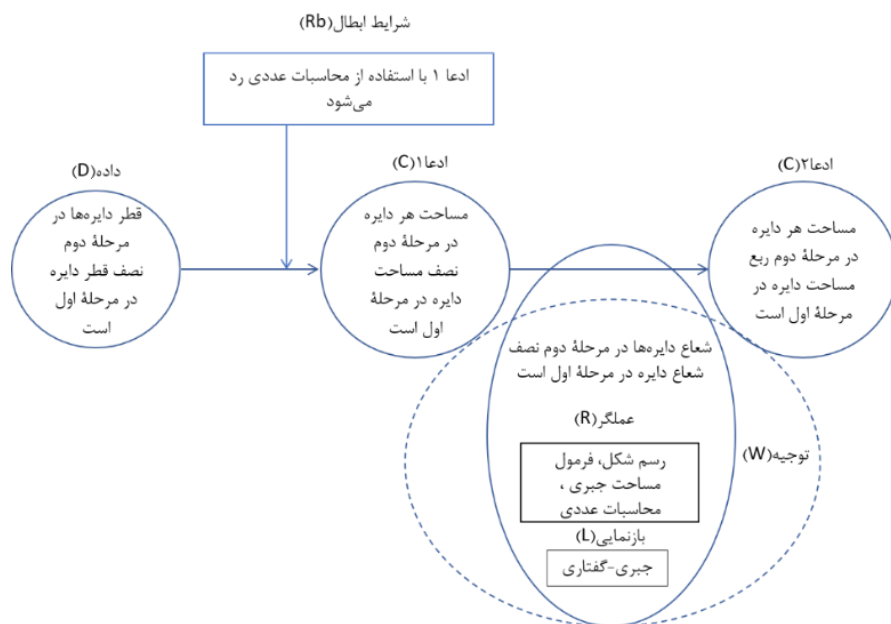
از سوی دیگر، میزان اعتبار استدلالی که این گروه در ابتدا عرضه کرد، ضعیف و همراه با تردید بود. کاربرد عباراتی نظیر «فکر می‌کنم» و «شاید» بیانگر این بود که ادعاهای اولیه، از قطعیت کافی برخوردار نبودند و بیشتر بر حدس اولیه یا برداشت شهودی استوار بودند. با این حال، پس از آنکه دانش‌آموزان شکل را رسم کردند و فرمول مساحت دایره را به کار بردند و روابط جبری را نوشتند، درجه اعتبار استدلال به تدریج افزایش یافت. به این ترتیب، عملگرهای استدلالی در این گروه شامل رسم شکل، استفاده از رابطه مساحت دایره، محاسبات عددی و سپس بازنویسی جبری بود. مسیر حرکت از بازنمایی تصویری به بازنمایی عددی و سپس جبری، نشان داد که بازنمایی عددی در این گروه، نقش واسطه‌ای مهمی در اصلاح و تثبیت استدلال ایفا کرده است.

در مجموع دانش‌آموزان این گروه، ابتدا با استفاده از مثال‌های عددی تلاش کردند ادعای خود را به صورت استقرایی شکل دهند اما پس از ناکامی در ادامه این مسیر، استدلال خود را به سمت رویکردی تحقیقی-استنتاجی سوق دادند، به این معنا که بر پایه شواهد، ادعایی را به عنوان مناسب‌ترین گزینه برگزیدند و سپس کوشیدند آن را با بهره‌گیری از روابط منطقی و جبری توجیه کنند.

مؤلفه‌های مدل تلفیقی تولمین-بالاچف در فرایند استدلال دانش‌آموزان گروه ۱ به صورت زیر بود:

- داده اصلی بیان می‌کند قطر هر دایره در هر مرحله نصف قطر دایره قبلی است (D).

- ادعا در ابتدا این است که «مساحت نصف می‌شود» (C_1)، سپس به «مساحت یک‌چهارم می‌شود» (C_2) اصلاح می‌گردد.
 - توجیه در آغاز بر شهود و نسبت شعاع تکیه دارد (W_1)، سپس به‌صورت تحلیلی و نمادین و با استفاده از فرمول πr^2 ارائه می‌شود (W_2).
 - عملگرها ابتدا ترسیم شکل و محاسبات عددی هستند (R_1) و در ادامه، شامل قواعد و عملیات جبری می‌شوند (R_2).
 - بازنمایی در ابتدا به‌صورت زبانی و عددی بیان می‌شود (L_1) و سپس شکل جبری و نمادین پیدا می‌کند (L_2).
 - پشتوانه در آغاز شهودی و تجربی است (B_1) و در ادامه به‌صورت نظری شکل می‌گیرد (B_2).
 - ساختار کنترل (Σ_1) در ابتدا ضعیف و با محاسبات ناتمام است و فاقد ابزار دقیق برای بررسی ادعاست، سپس با ورود فرمول و محاسبات جبری، تقویت می‌شود و امکان بازبینی و اصلاح ادعا فراهم می‌گردد (Σ_2).
- نمای کلی این مؤلفه‌ها و ارتباط بین آن‌ها، در تصویر ۲ نمایش داده شده است.



تصویر ۱: نمای کلی از ساختار استدلال گروه اول

تحلیل فرایند استدلال دانش‌آموزان گروه ۲

در این گروه، ابتدا دانش‌آموزان یک شکل برای مسئله رسم کردند و سپس تلاش کردند رابطه میان اجزا را به صورت دقیق تر بیان کنند. در این گروه نیز بازنمایی تصویری، نقطه آغاز استدلال بود، اما به تدریج با ورود به بازنمایی عددی و بررسی روابط کمی، استدلال به سمت دقت و انسجام بیشتری حرکت کرد.

فرایند استدلال گروه دوم نشان داد که نام‌گذاری اجزای شکل و تبدیل اطلاعات تصویری به داده‌های قابل محاسبه، زمینه‌ساز شکل‌گیری ادعای نهایی شد. این الگو تأیید می‌کند که در حل مسائل هندسی، تبدیل بازنمایی‌ها از یک سطح به سطحی دیگر، یکی از مهم‌ترین سازوکارهای تولید استدلال معتبر است.

از سوی دیگر، میزان اعتبار در استدلال این گروه نیز مانند گروه ۱، نخست ضعیف و همراه با تردید بود. سپس با مداخله غیرمستقیم پژوهشگر، دانش‌آموزان فرمول مساحت دایره را به کار بردند و روابط جبری را بازنویسی کردند، در نتیجه درجه اعتبار استدلال به تدریج افزایش یافت. به این ترتیب، عملگرهای استدلالی در این گروه شامل رسم شکل، استفاده از رابطه مساحت دایره، محاسبات عددی و سپس بازنویسی جبری بود.

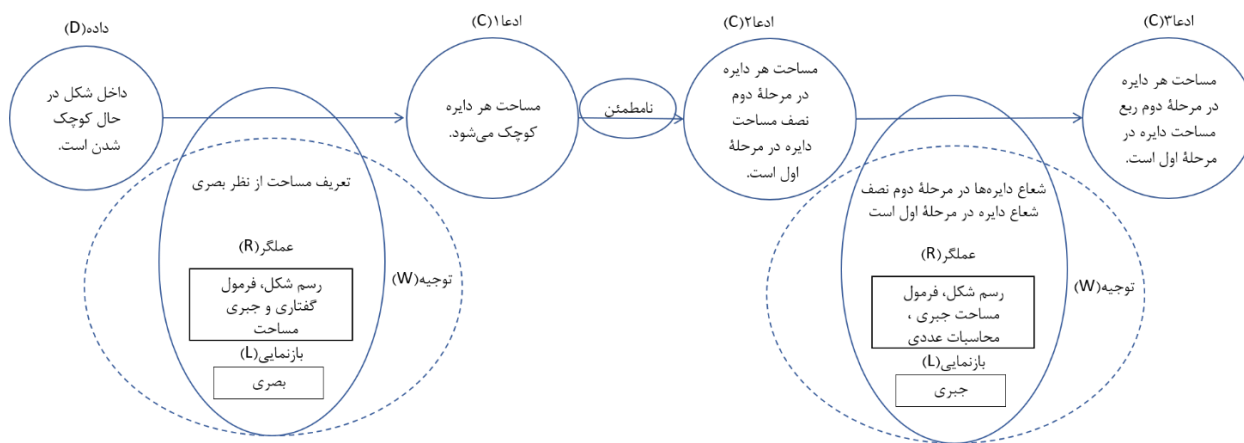
در مجموع، استدلال دانش‌آموزان این گروه با رویکردی دیداری و مبتنی بر بازنمایی تصویری آغاز شد، سپس با بهره‌گیری از روابط جبری، استدلال خود را به تدریج به سمت استدلال استنتاجی سوق دادند. این تحول، نشان‌دهنده رشد نسبی توانایی این گروه در استفاده از بازنمایی‌های جبری و کنترل تحلیلی بود که به استنتاجی تقریباً کامل در سطح مورد انتظار برای دانش‌آموزان دوره متوسطه، منجر شد.

مؤلفه‌های مدل تلفیقی تولمین-بالاچف در فرایند استدلال دانش‌آموزان گروه ۲ به صورت زیر بود:

- داده اصلی مورد استفاده، نصف‌شدن قطر دایره در مراحل متوالی است.
- ادعا سه بار مطرح شده است: مساحت دایره‌ها در هر مرحله کوچک‌تر شده‌اند (C_1)؛ مساحت دایره‌ها در هر مرحله نصف مرحله قبل هستند (C_2)؛ مساحت دایره‌ها ربع مساحت دایره قبل هستند (C_3) نتیجه استدلال استنتاجی آن‌ها است.
- توجیه در آغاز، به صورت بصری است (W_1)، سپس به صورت تحلیلی و نمادین و با استفاده از فرمول πr^2 ارائه می‌شود (W_2).
- عملگرها در شروع، ترسیم شکل و فرمول مساحت دایره به صورت کلامی و نوشتاری جبری هستند (R_1) و در ادامه شامل قواعد و محاسبات جبری می‌شوند (R_2).
- بازنمایی اول، به صورت زبانی و تصویری بیان می‌شود (L_1) و پس از آن، شکل جبری و نمادین پیدا می‌کند (L_2).
- پشتوانه ابتدا شهودی و تجربی است (B_1) و در ادامه، به صورت نظری شکل می‌گیرد (B_2).

- ساختار کنترل (Σ_1) اولیه، ضعیف و با تکیه بر مشاهدات و فاقد ابزار دقیق برای بررسی ادعاست. ولی با ورود فرمول و محاسبات جبری، تقویت می‌شود و امکان بازبینی و اصلاح ادعا فراهم می‌گردد (Σ_2).

نمای کلی این مؤلفه‌ها و ارتباط بین آن‌ها، در تصویر ۳ نمایش داده شده است.



تصویر ۲: نمای کلی از ساختار استدلال گروه دوم

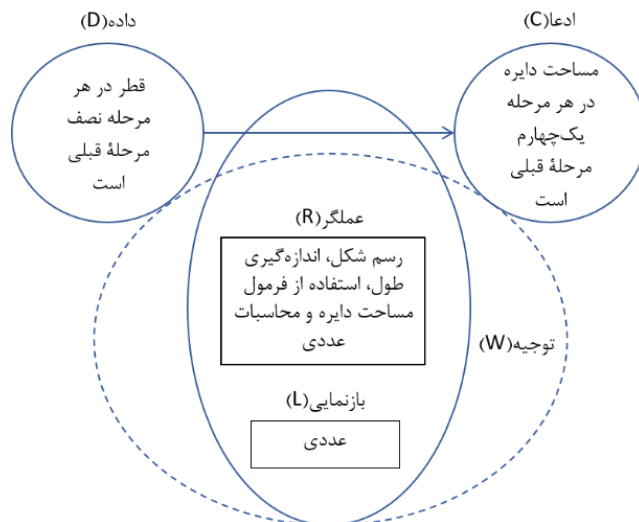
تحلیل فرایند استدلال دانش آموزان گروه ۳

این گروه پس از رسم شکل و اندازه‌گیری قطرهای، با استفاده از فرمول مساحت دایره و انجام محاسبات عددی، الگوی تغییر مساحت‌ها را به صورت عددی بررسی کرد و به این نتیجه رسید که مساحت هر دایره در هر مرحله یک چهارم مساحت دایره مرحله قبل است. با این حال، تحلیل فرایند حل مسئله این گروه نشان داد که استدلال‌شان عمدتاً در سطح استقرایی و مبتنی بر محاسبات عددی باقی مانده و به یک استدلال استنتاجی رسمی، ارتقا نیافت.

در این گروه، شرایط ابطال مشاهده نشد و ادعاها با قطعیت بیشتری نسبت به گروه‌های دیگر بیان شدند. از این رو، استدلال گروه سوم بیشتر بر تطابق عددی نتایج با انتظار اولیه استوار بود تا بر بازبینی انتقادی و بازسازی استدلال. به عبارت دیگر، عدم گذار از محاسبات عددی به تحلیل جبری، موجب شد که گروه در ارائه یک استدلال کلی و مستقل از داده عددی، ناکام بماند. علاوه بر این، ساختار کنترلی در فرایند استدلال آن‌ها بسیار محدود بود. کنترل تنها در لحظه پایانی و به شکل یک تعمیم ساده اعمال شد و هیچ بازبینی یا نقدی نسبت به ادعا یا روش صورت نگرفت. همچنین با توجه به بازنمایی‌ها و کنترل به کار رفته، پشتوانه ادعا بر بستر شهودی و تجربی بود. در مجموع، فرایند استدلال در این گروه عمدتاً بر پایه محاسبات عددی، اندازه‌گیری‌های تجربی و تعمیم عددی مشاهده شده شکل گرفت و در سطح استدلال استقرایی باقی ماند، بدون آنکه به استفاده از بازنمایی‌های جبری یا استنتاج تحلیلی گسترش یابد. فقدان استدلال استنتاجی و اثبات کلی، نشان‌دهنده محدودیت این گروه در گذار به تفکر جبری و استفاده از ابزارهای تحلیلی برای کنترل و بازبینی ادعا بود.

مؤلفه‌های مدل تلفیقی تولمین-بالاچف در فرایند استدلال دانش آموزان گروه ۳ به صورت زیر بود:

- داده نصف‌شدن قطر دایره در مراحل متوالی و اندازه قطر اولیه (پاره خط AB).
 - ادعا تنها یکبار و در پایان کار مطرح می‌شود: «مساحت هر دایره در هر مرحله، یک‌چهارم مساحت دایره مرحله قبل است».
 - توجیه بر پایه شهود و محاسبات عددی: ابتدا با اتکا به نسبت شعاعها (W_1)، در ادامه با محاسبه مساحت دایره‌های مرحله‌های اول و دوم و سوم و محاسبه نسبت‌های حاصل در مسیر اثبات ادعا.
 - عملگرها رسم شکل با ابزار هندسی، اندازه‌گیری طول، استفاده از فرمول مساحت دایره و محاسبات عددی (R_1).
 - بازنمایی تصویری (شکل)، گفتاری و عددی (L_1).
 - پشتوانه شهودی-تجربی باتکیه بر بستر عددی (B_1).
 - ساختار کنترل محدود به تعمیم عددی مشاهده‌شده در پایان کار (Σ_1).
- نمای کلی این مؤلفه‌ها و ارتباط بین آن‌ها، در تصویر ۴ نمایش داده شده است.



تصویر ۳: نمای کلی از استدلال گروه سوم

در جدول ۱، خلاصه تحلیل مؤلفه‌های مدل تلفیقی تولمین-بالاچف در گفت‌وگوهای هر یک از سه گروه دانش‌آموزان ارائه شده است.

مؤلفه‌ها	داده	ادعا	پشتوانه	عملگر	نظام بازنمایی	ساختار کنترل
گروه ۱	قطر هر دایره در هر مرحله، نصف قطر دایره مرحله قبل است.	ابتدا «مساحت نصف می‌شود» و در ادامه، «مساحت یک‌چهارم می‌شود»	ابتدا شهودی-تجربی و در ادامه، نظری	رسم شکل، محاسبات عددی، قواعد و عملیات جبری	ابتدا: زبانی و عددی در ادامه جبری و نمادین	ابتدا: ضعیف با محاسبات ناتمام، فاقد ابزار دقیق برای بررسی ادعا در ادامه: تقویت با استفاده از فرمول و محاسبات جبری.
گروه ۲	قطر هر دایره در هر مرحله، نصف قطر دایره مرحله قبل است.	ابتدا «مساحت دایره‌ها در هر مرحله کوچک‌تر شده‌اند» در ادامه، «مساحت دایره‌ها نصف می‌شوند» در نهایت، «مساحت دایره‌ها یک‌چهارم می‌شوند»	ابتدا: شهودی-تجربی و در ادامه، نظری	رسم شکل، فرمول گفتاری و جبری، مساحت، قواعد و محاسبات جبری	ابتدا: زبانی و تصویری در ادامه جبری و نمادین	ابتدا ضعیف باتکیه بر مشاهدات در ادامه تقویت با استفاده از فرمول و محاسبات جبری.
گروه ۳	قطر هر دایره در هر مرحله نصف قطر دایره مرحله قبل است.	در نهایت، «مساحت دایره‌ها یک‌چهارم می‌شوند»	شهودی-تجربی باتکیه بر بستر عددی	رسم شکل، اندازه‌گیری طول، استفاده از فرمول مساحت دایره و محاسبات عددی.	تصویری (شکل)، گفتاری و عددی	محدود به تعمیم عددی مشاهده‌شده در پایان کار

جدول ۱: مؤلفه‌های مدل تلفیقی تولمین-بالاچف در ساختار استدلال سه گروه دانش‌آموزان

بحث و نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر باهدف تحلیل فرایند استدلال دانش‌آموزان پایه یازدهم در حل مسائل هندسی و با بهره‌گیری از مدل تلفیقی تولمین و بالاچف (۲۰۱۶) انجام شد. یافته‌ها نشان دادند که استدلال دانش‌آموزان ساختاری چندلایه دارد و مؤلفه‌هایی مانند داده، ادعا، توجیه، پشتوانه، شرایط ابطال، میزان اعتبار، عملگر، بازنمایی و کنترل، به‌صورت تعاملی در شکل‌گیری این ساختار نقش ایفا می‌کنند. این ساختار پویا سبب شد که استدلال‌ها در جریان حل مسئله، به‌طور مداوم بازسازی شوند و مسیرهای متفاوتی برای رسیدن به نتیجه، شکل بگیرد.

چهار نوع استدلال دیداری، استقرایی، تحقیقی-استنتاجی و استنتاجی غیررسمی در فرایند حل مسئله مشاهده شد. استدلال‌های دیداری و استقرایی عمدتاً در مراحل آغازین و برای تولید ادعاهای اولیه به کار رفتند، اما به دلیل ضعف در کنترل‌های منطقی و تحلیلی، به سطح استنتاجی معتبر ارتقا نیافتند. این نتیجه با یافته‌های پژوهش‌های پیشین (کرامر، ۲۰۲۴؛ فراری، ۲۰۲۴؛ پدمونته و بالاچف، ۲۰۱۶) که ضعف در کنترل‌های سطحی را مانعی برای دستیابی به استدلال معتبر دانسته‌اند، هم‌خوانی

دارد. ازسوی دیگر، استدلال‌های تحقیقی-استنتاجی و به‌ویژه استنتاجی غیررسمی، بیشترین نقش را در نزدیک‌شدن به سطح استدلال استنتاجی رسمی ایفا کردند و توانستند مسیر دستیابی به استدلال‌های تحلیلی‌تر را فراهم کنند.

نقش بازنمایی‌ها در این فرایند برجسته بود. تبدیل بازنمایی‌های تصویری و عددی به روابط جبری، شرطی اساسی برای تقویت انسجام استدلال و پشتیبانی از ادعاها محسوب شد. باین‌حال، توانایی تبدیل بازنمایی‌ها زمانی مؤثر بود که دانش‌آموزان بتوانند داده‌ها، توجیه‌ها و پشتوانه‌ها را در قالب روابط ریاضی به طور منسجم به یکدیگر پیوند دهند. در مقابل، ناتوانی در تبدیل مشاهدات بصری به روابط جبری موجب گسست در زنجیره استدلال و تثبیت ادعاهای بی‌پشتوانه شد.

مؤلفه شرایط ابطال نیز زمانی نقش اصلاحی مؤثر داشت که همراه با کنترل‌های عددی، بصری و جبری فعال می‌شد. این ترکیب امکان آشکارسازی تناقض‌ها، آزمون تعمیم‌ها و بازبینی مسیر استدلال را فراهم کرد. در غیاب چنین کنترل‌هایی، شرایط ابطال غیرفعال ماند و استدلال‌ها بدون اصلاح ادامه یافتند. نتایج این پژوهش نشان داد که کیفیت توجیه‌ها و پشتوانه‌ها به توانایی استفاده منعطف از بازنمایی‌ها و تسلط بر نمادگذاری و رویه‌های جبری وابسته بود. ضعف در این حوزه‌ها نه تنها به تولید توجیه‌های نادرست منجر می‌شد، بلکه اعتبار کل زنجیره استدلال را نیز تضعیف می‌کرد.

در مجموع یافته‌های این پژوهش، با تأکید بر ماهیت چندوجهی استدلال ریاضی و ضرورت توجه هم‌زمان به ابعاد ساختاری و شناختی آن، می‌تواند شواهدی برای بازنگری در طراحی برنامه‌های درسی ریاضی، به‌ویژه در حوزه آموزش استدلال و اثبات، فراهم آورد و زمینه‌ای برای طراحی آموزش‌های مؤثرتر، تقویت مهارت‌های استدلالی دانش‌آموزان و جهت‌دهی پژوهش‌های آینده در این حوزه ایجاد کند.

پیشنهادهای دلالت‌های پژوهشی

برای پژوهش‌های آتی: بررسی جداگانه مؤلفه‌های مدل تولمین-بالاچف، به‌ویژه کنترل‌ها، شرایط ابطال و عملگرها، می‌تواند به روشن‌تر شدن نقش مستقل هر یک در شکل‌گیری استدلال کمک کند. همچنین پیشنهاد می‌شود استدلال دانش‌آموزان در حوزه‌های غیرهندسی به‌ویژه جبر، مطالعه شود تا امکان مقایسه الگوهای استدلال و غنی‌سازی تحلیل‌های نظری، فراهم گردد.

برای معلمان و طراحان آموزشی: تقویت کنترل‌های تحلیلی و بازنمایی‌های جبری از طریق مسائل چندمرحله‌ای و بازپاسخ می‌تواند گذار از سطح شهودی به سطح جبری استدلال را تسهیل کند. طراحی فعالیت‌هایی که دانش‌آموزان را به طرح ادعا و تلاش برای اثبات آن ترغیب کند نیز به رشد تدریجی مهارت‌های استدلالی کمک می‌کند. علاوه بر این، توجه به تنوع بازنمایی‌ها و فراهم کردن فرصت ترجمه میان آن‌ها برای تقویت تفکر ساختاری ضروری است.

منابع

- احمدپور، فاطمه؛ فدایی، محمدرضا؛ رفیع پور، ابوالفضل. (۱۳۹۶). لزوم بازاندیشی در محتوای کتاب‌های درسی ریاضی پایه هفتم و هشتم از منظر استدلال و اثباتو مطالعات برنامه درسی. ۱۲(۴۶)، ۵۹-۸۴.
- تال، د. (۱۳۸۵). ماهیت اثبات ریاضی. رشد آموزش ریاضی، ۸۳، ۳-۱۲.
- جعفری تبار حسن. (۲۰۱۹). اجرای مدل استدلالی تولمین در حقوق.
- ریحانی، ابراهیم؛ حمیدی، فریده و کلاهدوز، فهیمه. (۱۳۹۱). بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم متوسطه از استدلال و اثبات ریاضی. فصلنامه علمی پژوهشی مطالعات برنامه درسی، ۲۴، ۱۸۲-۱۵۷.
- سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. (۱۴۰۴). هندسه ۱: پایه دهم دوره دوم متوسطه. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
- ساسانی‌پور، مانی، رشیدی، ناصر. (۲۰۲۵). آرایه‌ی یک رویکرد آموزشی استدلال‌محور برای تدریس متون دانشگاهی به دانشجویان ایرانی رشته‌ی آموزش زبان انگلیسی. آموزش پژوهی نوین، ۱۱(۴۲)، ۷۶-۵۹.
- سبزعلی، نوید، و توانایی، ندا. (۱۳۹۹). بررسی تاثیر آموزش هندسه بر مبنای نظریه ون هیلی بر یادگیری دانش آموزان. پژوهش در آموزش ریاضی، ۱(۲)، ۱-۱۱.
- شورای عالی آموزش و پرورش. (۱۳۹۱). برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران. وزارت آموزش و پرورش.
- صفابخش چکوسری، ا.، و یافتیان، ن. (۱۳۹۷). سطوح تفکر هندسی ون هیلی‌ها بین دانش‌آموزان پایه هشتم. رشد آموزش ریاضی، ۳۷(۳)، ۱۳-۸.
- عرب یوسف آبادی. (۲۰۲۵). تحلیل بلاغی و استدلالی زبان اقناعی در مجالس سبعه مولانا: مطالعه‌ای بر مبنای نظریه تولمین. فنون ادبی، ۱۷(۴)، ۱۹-۳۲.
- گویا، ز. (۱۳۹۱). سخن سردبیر. در کلاهدوز، ف.، ریحانی، ا.؛ حمیدی، ف. (نویسندگان)، استدلال و اثبات در آموزش ریاضی (رشد آموزش ریاضی، شماره ۱۰۸). دفتر انتشارات و فناوری آموزشی.
- یافتیان، ن.؛ پازوکی، ل. (۱۴۰۰). ارزیابی درک دانش‌آموزان دختر و پسر پایه دهم رشته ریاضی و فیزیک از شکل‌های هندسی بر اساس نظریه دووال. رویکردهای نوین آموزشی، ۱۶(۲)، ۱۵۳-۱۷۰.
- یافتیان، نرگس، و انصاری، محمدرضا. (۱۳۹۹). توانایی دانش‌آموزان پایه یازدهم در ارزیابی استدلال‌های ریاضی. فناوری آموزش (فناوری و آموزش)، ۱۴(۳) (پیاپی ۵۵)، ۶۴۳-۶۵۶.

References

- Ahmadpour, F., Fadaei, M. R., Rafi'pour, A. (2017). The necessity of reconsidering the content of seventh- and eighth-grade mathematics textbooks from the perspective of reasoning and proof. *Curriculum Studies*, ۱۲(۴۶), ۵۹-۸۴. [In Persian]
- Almpani, S., & Stefaneas, P. (2023). Bridging informal reasoning and formal proving: The role of argumentation in proof-events. *Foundations of Science*, 1-25.
- Arab Yousefabad, F. (2025). Rhetorical and argumentative analysis of persuasive language in *Majāles-e Sab'eh* of Rumi: A study based on Toulmin's theory. *Literary Arts*, 17(4), 19-32. [In Persian]
- Balacheff, N. (2013). Cognitive vs. situational perspectives in mathematics education research: The case of conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 82(3), 249-265.
- Bikner-Ahsbabs, A., & Prediger, S. (Eds.). (2014). *Networking of theories as a research practice in mathematics education*. Springer International Publishing.
- Bock, C., & Dimmel, J. (2021). Dynamic Spatial Diagrams and Solid Geometric Figures. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Boero, P., Douek, N., Morselli, F., & Pedemonte, B. (1999). Argumentation and proof in mathematics education. In *Proceedings of CERME 1* (pp. 125-139).
- Cramer, J., & Kempen, L. (2022, February). Toulmin and beyond: Structuring and analyzing argumentation. In *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* (No. 07).
- Creswell, J. W. (2014). Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches (4th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage Publications.
- Duval, J.-P. (1998). Périodes locales et propagation de périodes dans un mot. *Theoretical Computer Science*, 204(1-2), 87-98.
- Educational Research and Planning Organization. (2025). Geometry 1: Grade 10, Second Secondary Education. Printing and Publishing Company of Textbooks of Iran.
- Ferrari, P. L. (2024). Toulmin's model of argument and mathematics education: A critical view. *For the Learning of Mathematics*, 44(2), 15-20.
- Fiallo, J., & Gutiérrez, A. (2017). Analysis of the cognitive unity or rupture between conjecture and proof when learning to prove in a Grade 10 trigonometry course. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 145-167.
- Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1996). Cognitive unity of the theorem: A tool for analyzing proving processes. *Proceedings of PME, Valencia*.
- Gholamazad, S., Liljedahl, P., & Zazkis, R. (2003). One Line Proof: What Can Go Wrong?. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 437-444.

Ghousseini, H., & Herbst, P. (2016). Pedagogies of practice and opportunities to learn about classroom mathematics discussions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(1), 79–103.

Gooya, Z. (2012). Editor's note. In F. Kalahdooz, E. Reyhani, & F. Hamidi (Eds.), *Reasoning and proof in mathematics education (Roshd Mathematics Education*, No. 108). Educational Publishing and Educational Technology Office. [In Persian]

Hanna, G., & Knipping, C. (2020). Proof in mathematics education, 1980–2020: An overview. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 30(Special Issue), 1–13.

Jafari Tabar, H. (2019). *Applying Toulmin's model of argumentation in law*. [In Persian]

Jonsson, B., Granberg, C., & Lithner, J. (2020). Gaining mathematical understanding: The effects of creative mathematical reasoning and cognitive proficiency. *Frontiers in Psychology*, 11, Article 574366.

Koichu, B., & Zazkis, R. (2013). A dialogic method of presenting proofs: Focus on Fermat's little theorem. In *Proceedings of the Conference for Research in Undergraduate Mathematics Education*.

Krippendorff, K. (2004). Measuring the reliability of qualitative text analysis data. *Quality and quantity*, 38(6), 787-800.

Lepore, M. (2024). A holistic framework to model students' cognitive process in mathematics education through fuzzy cognitive maps. *Heliyon*, 10(16), Article e35961.

Nardi, E. (2025). Bridging informal reasoning and formal proof through interactive learning activities and digital technologies. *Educational Studies in Mathematics*, 98(1), 1–20.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. *NCTM*.

Pedemonte, B. (2001). Relation between argumentation and proof in mathematics: cognitive unity or break. In *Proceedings of the 2nd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 70-80).

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23–41.

Pedemonte, B., & Balacheff, N. (2016). Establishing links between conceptions, argumentation and proof through the cKc-enriched Toulmin model. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 104–122.

Pino-Fan, L. R., Guzmán, I., Font, V., & Duval, R. (2024). Analysis of the underlying cognitive activity in the resolution of a task on derivability of the absolute-value function: Two theoretical perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 105(3), 327–348.

Rapanta, C. (2021). Can teachers implement a student-centered dialogical argumentation method across the curriculum? *Teaching and Teacher Education*, 105, Article 103404.

Reyhani, E., Hamidi, F., & Kalahdooz, F. (2012). Investigating second-year secondary school students' understanding of mathematical reasoning and proof. *Iranian Journal of Curriculum Studies*, 7(24), 157–182. [In Persian]

Reynolds, K. A., Aldrich, C. E. A., von Davier, M., Fishbein, B., Khorramdel, L., Bookbinder, A., Bezirhan, U., & Yin, L. (2024). *TIMSS 2023 Encyclopedia: Education policy and curriculum in mathematics and science*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College.

Rodríguez-Nieto, C. A., & Moll, V. F. (2025). Mathematical connections promoted in multivariable calculus classes and in problem solving about vectors, partial and directional derivatives, and applications. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 21(4), Article em2619.

Sabzali, N., & Tavanaei, N. (2021). Investigating the effect of geometry instruction based on the Van Hiele theory on students' learning. *Research in Mathematics Education*, 1(2), 1–11. [In Persian]

Safabakhsh Chakosari, A., & Yafthian, N. (2018). Van Hiele levels of geometric thinking among eighth-grade students. *Roshd Mathematics Education*, 37(3), 8–13.

Sasanipour, M., & Rashidi, N. (2025). A reasoning-based instructional approach for teaching academic texts to Iranian students of English language teaching. *Modern Research in Education*, 11(42), 59–76.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sowder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *Mathematics teacher*, 91(8), 670-675.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and university mathematics education research: A systematic review. *ZDM – Mathematics Education*, 56(1), 47,59.

Sukirwan, S., Muhtadi, D., Saleh, H., & Warsito, W. (2020). Profile of students' justifications of mathematical argumentation. *Infinity Journal*, 9(2), 197–212.

Supreme Council of Education. (2012). *National curriculum of the Islamic Republic of Iran*. Ministry of Education.

Syahr, P. H., Lukman, L., & Prabawanto, S. (۲۰۲۶). Utilizing Praxeology and the cKc Model to Developing Didactical Design in Derivatives: An Indonesian Mathematics Textbook Study.

Tall, D. (2006). The nature of mathematical proof. *Roshd Mathematics Education*, (83), 3–12.

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*. Cambridge: Cambridge University Press.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument* (2nd ed.). Cambridge University Press.

van Hiele, P. M. (1957). De probleemstelling voor het inzicht van meetkunde-leerlingen en een daarop afgestemd leerplan [Doctoral dissertation, Universiteit van Amsterdam].

van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Academic Press.

von Davier, M., Kennedy, A., Reynolds, K., Fishbein, B., Khorramdel, L., Aldrich, C., Bookbinder, A., Bezirhan, U., & Yin, L. (2024). TIMSS 2023 International Results in Mathematics and Science. *Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center*.

Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2014). Why and how mathematicians read proofs: An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics*, 85(1), 79–95.

Wilson, D. (2009). An integrated approach to teaching and learning geometry. In T. V. Craine (Ed.), *Understanding geometry for a changing world* (71st ed.). National Council of Teachers of Mathematics.

Yaftian, N., & Ansari, M. R. (2020). Eleventh-grade students' ability to evaluate mathematical arguments. *Educational Technology (Technology and Education)*, 14(3, Serial No. 55), 643–656. [In Persian]

Yaftian, N., & Pazoki, L. (2022). Evaluating tenth-grade male and female mathematics and physics students' understanding of geometric figures based on Duval's theory. *New Approaches in Educational Research*, 16(2), 153–170. [In Persian]

پیوست الف:

(مسائل هندسه)

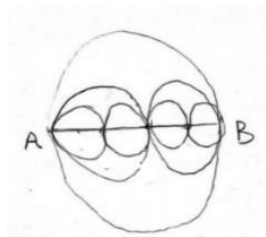
- (۱) مسئله اول: یک n -ضلعی چند قطر دارد؟ چرا؟ توضیح دهید و در صورت امکان رابطه‌ای برای تعداد قطرهای چندضلعی بنویسید و درستی آن را بررسی کنید.
- (۲) مسئله دوم: دو نقطه A و B با فاصله دلخواه رسم می‌کنیم. نقطه‌ای دلخواه P را طوری در نظر می‌گیریم که $PA = PB$ باشد. چند نقطه با این شرایط می‌توان در نظر گرفت؟ آیا می‌توان تمام این نقاط P را پیدا کرد؟ آن را بررسی کنید.
- (۳) مسئله سوم: مثلث متساوی‌الساقین ABC را در نظر می‌گیریم. میان یکی از اضلاع آن (مثلاً BC) را رسم می‌کنیم. محل برخورد میانه با ضلع BC را M می‌نامیم. نسبت مساحت دو مثلث AMB و MC چگونه است؟ آیا می‌توان رابطه‌ای برای آن پیدا کرد؟
- (۴) با ضلع داده شده AB ، ابتدا دایره‌ای رسم می‌کنیم که AB قطر آن باشد. AB را به دو قسمت مساوی CB و AC تقسیم می‌کنیم. سپس دو دایره با قطرهای AC و CB رسم می‌کنیم. به همین ترتیب، AC و CB را نصف کرده و دایره‌هایی به قطر این اندازه‌ها رسم می‌کنیم. نسبت مساحت هر دایره در هر مرحله با مساحت دایره اولیه چیست؟ بررسی کنید.

پیوست ب:

(شناسایی مولفه‌های ساختار در بخشی از استدلال گروه ۲)

نیایش سؤال را می‌خواند و دانش‌آموزان با کمک یکدیگر شکل متناسب با موقعیت مسئله رسم می‌کنند.

عملگر: رسم شکل



شکل رسم شده توسط دانش‌آموزان گروه دوم برای حل مسئله

(۱) نرگس: (فرمول) مساحت چه می‌شد؟

(۲) نیایش: شعاع ضرب در شعاع ضرب در عدد پی.

عملگر: فرمول گفتاری مساحت

(۳) نیایش: یعنی ۲ ضرب در ۲ ضرب در عدد پی.

عملگر: فرمول جبری مساحت

نیایش می‌نویسد: $2 \times 2 \times \pi$.

(۴) کیمیا با دیدن تصویر می‌گوید: خانم (مساحت‌ها) با هم برابر نیستند، درست است؟

ادعای اول

میزان اعتبار

کنترل: تصویری

(۵) نرگس: مساحت‌ها دارد کوچک می‌شود. مساحت یعنی داخلش (شکل). داخلشان کوچک‌تر شده، پس یعنی برابر نیستند.

پژوهشگر: خب حالا بگویید به نظرتان (مساحت) چقدر کوچک‌تر می‌شود؟

(۶) نیایش: مساحت هر دایره (در هر مرحله نسبت به مرحله قبل) نصف می‌شود.

ادعای دوم - نادرست

۷) نرگس: مطمئن هستی؟ (مساحت دایره مرحله دوم نسبت به مرحله اول) نصف شده؟

میزان اعتبار

۸) نرگس با اشاره به داده مسئله می گوید: (فقط می دانیم) قطرهای نصف شده و راجع به مساحتها چیزی نمی دانیم.

داده

میزان اعتبار

در این مرحله، دانش آموزان متوجه شدند ادعایی که کردند ممکن است درست نباشد، بنابراین سعی کردند برای تأیید یا رد آن، دلایل منطقی تری ارائه دهند.