



The Trend of Content Presentation and Levels of van Hiele Related to Quadrilaterals in Elementary Mathematics Textbooks

Ebrahim Reyhani*, Narges Yaftian **, Amir Esmaeili *** , Abdollah Hessam ****

* Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran. E-mail: e_reyhani@sru.ac.ir

** Associate Professor, Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran (Corresponding Author). E-mail: yaftian@sru.ac.ir

*** M.Sc., Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran. E-mail: a_esmaeili_k@yahoo.com

**** Ph.D. Student, Department of Mathematics, Faculty of Science, Shahid Rajaei Teacher Training University, Tehran, Iran. E-mail: hesam2200@yahoo.com

Article Info

Abstract

Article type:

Research Article

Key words:

content analysis,
elementary
mathematics
textbooks,
quadrilaterals, van
Hiele theory

Article history:

Received : 25 March
2026

Accepted : 06 May
2026

Understanding quadrilaterals, as one of the more challenging topics in geometry, is influenced substantially by the content of mathematics textbooks, particularly at the elementary level. The purpose of the present study was to examine the progression of content related to quadrilaterals and the corresponding Van Hiele levels of geometric thinking in elementary mathematics textbooks, in order to explore the extent to which these materials reflect the levels of thinking expected from students. The study employed a descriptive-analytical design with a qualitative approach. Relevant sections concerning quadrilaterals were purposefully selected from the textbooks. Data were collected using content-analysis forms based on Van Hiele levels, whose face and content validity were confirmed by experts in mathematics education. Inter-rater reliability for the coding process was ensured using Cohen's kappa coefficient. The findings indicated that the presented content includes the introduction of names and visual representations, prototypical examples, drawing methods, hands-on activities and construction tasks, properties related to sides, angles, diagonals, and symmetry, hierarchical or partition-based relationships, and the sum of interior angles. This content corresponds to Van Hiele levels 1 through 3, with level 2 being the predominant level. In terms of content progression, squares and rectangles are introduced for the first time in grade one, while trapezoids, parallelograms, and rhombi are introduced in grade four. Moreover, none of the quadrilaterals are formally defined using the term "definition," although the presentations in the grade four textbook are more closely aligned with formal definitions.

Cite this Article:

Reyhani, E., Yaftian, N. Esmaeili, A., & Hesam, A. (2026). The progression of content presentation and Van Hiele levels related to quadrilaterals in elementary school mathematics textbooks. *Theory and Practice in Curriculum*, 14(27), 111–140. (e243192).

<https://doi.org/10.22034/cstp.2026.578671.1142>



© 2016 by Iranian Curriculum Association Press Publisher:
Iranian Curriculum Association Press

Extended Abstract

Geometry is a fundamental component of mathematics education and plays an important role in developing students' logical reasoning, critical thinking, visualization, problem-solving, classification, and deductive reasoning abilities. Among geometric concepts, quadrilaterals are considered particularly challenging for students because understanding them requires more than recognizing their visual appearance. Students need to identify and organize the properties of sides, angles, diagonals, symmetry, and relationships among different classes of quadrilaterals. In particular, understanding hierarchical relationships among quadrilaterals is closely associated with the development of higher levels of geometric thinking.

Previous studies have indicated that many students and even prospective and practicing teachers experience difficulties in recognizing, defining, classifying, and establishing relationships among quadrilaterals. One important source of these difficulties is the prototype phenomenon, through which learners tend to recognize geometric figures according to familiar visual prototypes rather than their defining properties. For example, students may not readily accept a square as a particular type of rectangle because their mental images of rectangles are often restricted to figures with two longer and two shorter sides. The ways in which quadrilaterals are introduced and developed in mathematics textbooks can therefore have a significant influence on students' conceptual understanding.

The Van Hiele theory of geometric thinking provides a useful framework for examining the development of geometric reasoning. According to this theory, geometric thinking develops through five levels: visualization, analysis, informal deduction, formal deduction, and rigor. At the visualization level, figures are recognized primarily on the basis of their overall appearance. At the analysis level, students identify and describe properties of figures. At the informal deduction level, they recognize relationships among properties and relationships among classes of figures and can organize figures hierarchically. The fourth and fifth levels involve formal deductive reasoning and rigor, respectively.

Textbooks are among the most influential resources in mathematics teaching and learning and can reflect the level of geometric thinking expected from students at different educational stages. Consequently, analyzing textbook content from the perspective of the Van Hiele theory can provide useful information about the progression and organization of geometric concepts. Although numerous studies have examined students' Van Hiele levels, relatively little research has focused on the extent to which elementary mathematics textbooks reflect different levels of geometric thinking, particularly in relation to quadrilaterals. Therefore, the present study aimed to examine the progression of content related to quadrilaterals and the corresponding Van Hiele levels in Iranian elementary school mathematics textbooks.

Research Question

The study addressed the following research question:

How is content related to quadrilaterals presented across Iranian elementary school mathematics textbooks, and what Van Hiele levels of geometric thinking are associated with this content?

Method

The study employed a descriptive-analytical design with a qualitative approach and was conducted through content analysis. The textbooks examined were the Iranian elementary school mathematics textbooks for Grades 1 through 6, published in 1404 (2025–2026). The selection of the textbooks was purposeful, and all sections directly or indirectly related to quadrilaterals were identified and analyzed.

Both horizontal and vertical analyses were conducted. The horizontal analysis focused on identifying and describing the content related to quadrilaterals within each grade. The vertical analysis examined the sequence and progression of this content across the six grades in order to determine whether and how the textbooks move students toward higher levels of Van Hiele geometric thinking.

The unit of analysis consisted of textbook content containing a specific concept related to the introduction, properties, or relationships of quadrilaterals. Activities, exercises, examples, and illustrations were considered meaningful units, while sections and chapters of the textbooks served as contextual units according to their sequence and position in the textbooks.

A researcher-developed content-analysis form was used as the data-collection instrument. The indicators and key characteristics associated with the first three Van Hiele levels were identified based on the theoretical framework and relevant previous research. Level 1 (visualization) included recognition of shapes based on visual characteristics, identification of shapes in different orientations, naming figures, drawing and constructing geometric figures, and manipulation with concrete materials. Level 2 (analysis) included examining, describing, comparing, and representing figures according to their properties, such as equality, parallelism, perpendicularity, angles, and sides. Level 3 (informal deduction) included organizing properties, formulating mathematical definitions, identifying hierarchical relationships among figures, using minimal defining properties, and employing informal deductive reasoning.

The content-analysis forms were reviewed by four experts in mathematics education to establish face and content validity. Their comments concerning the appropriateness, clarity, and coverage of the indicators were incorporated into the final instrument. Two researchers independently coded the textbook content according to the Van Hiele indicators. Disagreements were reviewed and resolved through discussion and consensus. Cohen's kappa coefficient was calculated for the complete dataset, yielding an inter-rater agreement coefficient of 0.88, which indicates a high level of coding reliability. When an activity required thinking at more than one Van Hiele level, the higher level was assigned to that activity.

Findings

The findings demonstrated that the content related to quadrilaterals in the elementary mathematics textbooks includes a wide range of topics, such as naming and visually representing geometric figures, recognition of prototypes, drawing and construction, manipulation and hands-on activities, properties of sides and angles, diagonals, symmetry, hierarchical and partitional relationships among quadrilaterals, and the sum of the interior angles of quadrilaterals. Overall, these contents corresponded to Van Hiele Levels 1 through 3, with Level 2 (analysis) being the dominant level.

In Grade 1, the content related to quadrilaterals was primarily associated with Level 1. Square and rectangle were introduced for the first time through visual recognition and informal experiences with geometric shapes. Students identified similar shapes, counted corners and edges, recognized geometric shapes in their surroundings, used templates to draw shapes, and worked with concrete materials such as colored paper and scissors. The emphasis was therefore on visual recognition, naming, and manipulation rather than on systematic analysis of geometric properties.

In Grade 2, the textbooks gradually moved from visual recognition toward analysis of geometric properties. Students reviewed geometric figures, drew squares and rectangles, recognized shapes in symmetric and tiling patterns, constructed squares using tangram pieces, and examined the equality of opposite sides of rectangles. These activities created opportunities for students to move from Level 1 toward Level 2. Manipulative activities, including tangrams and tiling patterns, appeared to provide a bridge between visual recognition and analysis of properties.

In Grade 3, Level 2 became more explicit and stable. Students examined right angles in rectangles and right-angled trapezoids, investigated parallel and equal opposite sides of rectangles, named vertices, and were introduced to diagonals. Geometric properties were often explored through measurement and observation. Importantly, however, the relationships among these properties were not yet systematically organized into a hierarchical structure of quadrilateral classes.

A significant transition occurred in Grade 4, where the content placed greater emphasis on Level 3, informal deduction. Trapezoids and parallelograms were introduced for the first time, followed by an examination of their properties and relationships with rectangles, rhombi, and squares. The parallelogram

was introduced using a minimal condition involving two pairs of parallel opposite sides, whereas the trapezoid was presented through a partitional definition based on having only one pair of parallel sides. Rectangle, rhombus, and square were subsequently presented through hierarchical relationships with the parallelogram. Thus, the textbook established an explicit conceptual network among different classes of quadrilaterals.

Grade 4 also included activities involving drawing quadrilaterals, examining diagonals, constructing figures with concrete materials, and using manipulatives to understand hierarchical relationships. The presentation of the parallelogram, rectangle, rhombus, and square in relation to one another represented one of the most important instances of Level 3 thinking in the elementary textbooks.

In Grade 5, the content continued to involve Levels 2 and 3. Students examined lines of symmetry, the sum of the interior angles of quadrilaterals, the bisection properties of diagonals in parallelograms, and the angle-bisecting properties of diagonals in squares and rhombi. The sum of the interior angles of a quadrilateral was approached both experimentally and through mathematical reasoning by dividing a quadrilateral into two triangles. Students were also asked to determine whether particular properties always, sometimes, or never hold for certain quadrilaterals. These activities created opportunities for informal reasoning and reflection on the generality of geometric properties.

In Grade 6, the emphasis returned predominantly to Level 2, although some activities reached Level 3. Students explored central and rotational symmetry in quadrilaterals, examined the relationship between diagonals and centers of symmetry, investigated supplementary angles in parallelograms, and solved problems involving the properties of parallelograms. Some exercises required multiple steps of reasoning and therefore corresponded to Level 3.

Across the six grades, the first introduction of the square and rectangle occurred in Grade 1, whereas the first introduction of the trapezoid, parallelogram, and rhombus occurred in Grade 4. The textbooks did not formally use the term “definition” for the quadrilaterals. Nevertheless, the presentations in Grade 4 showed a closer resemblance to formal mathematical definitions. The parallelogram was presented using a minimal defining condition, the trapezoid through a partitional classification, and the rectangle, rhombus, and square through hierarchical relationships based on the parallelogram.

The findings also revealed that quadrilateral-related content was not always presented in a single, coherent geometric unit. In Grades 2, 3, and 6, some geometric concepts were distributed across chapters whose titles were not directly related to geometry. For example, properties of rectangles appeared in chapters dealing with fractions, multiplication and division, and measurement. Although such distribution may facilitate connections among mathematical concepts, the fragmented presentation may also reduce the coherence of students’ conceptual networks.

Discussion and Conclusion

The findings indicate that the Iranian elementary mathematics textbooks provide a gradual progression in the geometric thinking required for understanding quadrilaterals. The progression generally moves from visualization (Level 1) in the early grades toward analysis (Level 2) and subsequently toward informal deduction (Level 3). This progression is broadly consistent with the developmental logic of the Van Hiele theory.

One strength of the textbooks is their extensive use of visual, manipulative, and exploratory activities. Drawing with templates, working on dot and grid paper, constructing figures with tangram pieces, identifying quadrilaterals in tiling and symmetry patterns, and constructing shapes with concrete materials can support students’ transition from visual recognition to analysis of geometric properties. Such activities are particularly valuable in elementary education because they connect abstract geometric concepts with concrete experiences.

Another important strength is the hierarchical presentation of quadrilaterals in Grade 4. Presenting the rectangle, rhombus, and square as special cases of the parallelogram can help students develop a more

sophisticated understanding of relationships among classes of figures. Such hierarchical classification is conceptually important because it enables learners to recognize that a geometric figure can simultaneously belong to more than one category.

Nevertheless, several limitations were identified. First, many quadrilaterals are introduced primarily through examples, visual prototypes, and exploratory activities rather than through explicit clarification of their defining properties. Although discovery-oriented learning can actively engage students, the absence of explicit summaries after exploratory activities may leave important mathematical conclusions implicit. Second, the continued use of prototype-based visual representations may reinforce students' tendency to associate a quadrilateral with a limited visual model. Providing greater variety in orientation, size, proportions, and non-prototypical examples could reduce this risk.

Third, although hierarchical relationships among quadrilaterals are introduced effectively in Grade 4, fewer opportunities for revisiting and consolidating these relationships appear in Grades 5 and 6. Continued reinforcement could help students retain and generalize the hierarchical structure. Finally, the distribution of quadrilateral-related content across different chapters and mathematical topics may contribute to conceptual fragmentation if the relationships among the dispersed concepts are not explicitly highlighted.

Overall, the study concludes that the progression of quadrilateral-related content in Iranian elementary mathematics textbooks generally moves toward higher Van Hiele levels as students advance through the grades. The analyzed content covers Levels 1 to 3, with Level 2 being the most prevalent, while Grade 4 demonstrates the strongest emphasis on Level 3. The findings suggest that future revisions of elementary mathematics textbooks should provide more diverse visual representations, explicitly include non-prototypical examples, make defining properties and conclusions from exploratory activities more explicit, and provide additional opportunities in Grades 5 and 6 for reviewing and consolidating hierarchical relationships among quadrilaterals. Such improvements may contribute to a deeper and more coherent development of students' geometric thinking.

Keywords: Content Analysis; Elementary Mathematics Textbooks; Quadrilaterals; Van Hiele Theory; Geometric Thinking; Geometry Education

روند ارائه محتوا و سطوح ون هیلی مرتبط با چهارضلعی ها در کتاب های ریاضی دوره ابتدایی

ابراهیم ریحانی*، نرگس یافتیان**، امیر اسماعیلی***، عبدالله حسام****

*دانشیار گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران. ایران. e_reyhani@sru.ac.ir

**دانشیار گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران. ایران. (نویسنده مسئول).

yaftian@sru.ac.ir

***کارشناسی ارشد، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران.

a_esmaeili_k@yahoo.com

****دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران.

hesam2200@yahoo.com

چکیده

اطلاعات مقاله

درک چهارضلعی ها به عنوان یکی از موضوعات چالش برانگیز هندسی تحت تأثیر محتوای کتاب های درسی به ویژه در دوره ابتدایی است. هدف مطالعه حاضر، بررسی روند ارائه محتوای مرتبط با چهارضلعی ها و سطوح تفکر ون هیلی متناسب با آن در کتاب های درسی ریاضی دوره ابتدایی به منظور بررسی بازتابی از سطوح تفکر مورد انتظار از دانش آموزان بود که به روش توصیفی-تحلیلی با رویکرد کیفی انجام شد. به صورت هدفمند، بخش های مرتبط با چهارضلعی ها از این کتاب ها انتخاب شدند. ابزار گردآوری داده ها فرم های تحلیل محتوایی بر اساس سطوح ون هیلی بود که روایی صوری و محتوایی آن مورد تایید استادان آموزش ریاضی قرار گرفت و از ضریب توافق کاپا جهت اطمینان از پایایی روش کدگذاری بین کدگذاران استفاده شد. یافته ها نشان داد که محتوای ارائه شده شامل معرفی نام و نمایش های بصری، نمونه های اولیه، شیوه های رسم، مهارت های دست ورزی و ساخت دست سازه، ویژگی های مربوط به اضلاع، زوایا، اقطار و تقارن، روابط سلسله مراتبی یا افزایی و مجموع زوایای داخلی است که این محتوا با سطوح ۱ تا ۳ ون هیلی متناسب است و سطح غالب، سطح ۲ ون هیلی است. در روند ارائه محتوا، اولین معرفی مربع و مستطیل در پایه اول و اولین معرفی دوزنقه، متوازی الاضلاع و لوزی در پایه چهارم است. همچنین، در نحوه ارائه چهارضلعی ها به طور رسمی از واژه «تعریف» برای هیچ کدام از چهارضلعی ها استفاده نشده است اما می توان گفت که معرفی ها در کتاب پایه چهارم، قرابت بیش تری با تعاریف رسمی دارد. در واقع، متوازی الاضلاع با شرایط حداقلی، دوزنقه به صورت افزایی و مربع، مستطیل و لوزی به صورت سلسله مراتبی مبتنی بر متوازی الاضلاع تعریف می شوند.

نوع مقاله:

علمی-پژوهشی

واژگان کلیدی:

تحلیل محتوا، کتاب های

درسی ریاضی دوره ابتدایی،

چهارضلعی ها، نظریه

ون هیلی

تاریخچه مقاله:

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۱/۰۵

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۲/۱۶

استناد به این مقاله:

ریحانی، ابراهیم، یافتیان، نرگس اسماعیلی، امیر و حسام، عبدالله. (۱۴۰۵). روند ارائه محتوا و سطوح ون هیلی مرتبط با چهارضلعی ها در

کتاب های ریاضی دوره ابتدایی. (e243192). نظریه و عمل در برنامه درسی، ۱۱۱-۱۴۰، ۱۴(27)، 243192

<https://doi.org/10.22034/cstp.2026.578671.1142>

© ناشر: انجمن مطالعات برنامه درسی ایران



مقدمه

هندسه به عنوان یکی از ارکان بنیادین ریاضیات، نقش به سزایی در تقویت تفکر منطقی، تفکر انتقادی و مهارت های حل مسئله در دانش آموزان ایفا می کند (شورای ملی معلمان ریاضی^۱، ۲۰۰۰). به همین دلیل، آموزش مفاهیم هندسی در آموزش ریاضی از اهمیت بالایی برخوردار است. این آموزش کمک می کند تا افراد مهارت های استدلالی را با شناخت اشکال هندسی، کاوش در ویژگی های آنها، مقایسه این ویژگی ها و ایجاد طبقه بندی های اشکال و پیوند دادن ویژگی ها و استدلال قیاسی توسعه دهند (ون دی وال و همکاران^۲، ۲۰۲۰).

چهارضلعی ها به عنوان یکی از موضوعات چالش برانگیز هندسی برای دانش آموزان، دانشجو معلمان و حتی معلمان مطرح می شوند (میلر^۳، ۲۰۱۸؛ برونهیرا و پونته^۴، ۲۰۱۹؛ آلتیپارماک و گورکان^۵، ۲۰۲۱؛ آکار و ایسیکسال^۶، ۲۰۲۲؛ سیبولسکی و همکاران^۷، ۲۰۲۴؛ پاجیلینگ و نورینی^۸، ۲۰۲۲). مطالعات نشان داده اند که افراد اغلب در مواجهه با تعاریف رسمی چهارضلعی ها چالش دارند و قادر به تشخیص و طبقه بندی انواع چهارضلعی نیستند (فوجیتا^۹، ۲۰۱۲؛ نگابا و نداکولاراک^{۱۰}، ۲۰۲۵). علاوه بر این، برخی از افراد در محاسبه مجموع زوایای داخلی چهارضلعی ها درک محدودی دارند و در شناسایی و ترسیم اضلاع، زوایا، اقطار و خطوط تقارن چهارضلعی ها به ویژه در اشکال کمتر متقارن مانند دوزنقه یا متوازی الاضلاع با مشکل مواجه می شوند (ماسیت و تاباک^{۱۱}، ۲۰۲۶). هم چنین، استدلال هندسی آنها به طور قابل توجهی تحت تأثیر تصاویر ذهنی، نام ها و تعاریف مبهم است که اغلب در دوره ابتدایی استفاده می شود (فوجیتا، ۲۰۱۲).

نتایج پژوهش ها در خصوص درک روابط میان چهارضلعی ها نشان می دهد که به طور کلی بسیاری از دانش آموزان چهارضلعی ها را بر اساس «پدیده نمونه اولیه^{۱۲}» تشخیص می دهند و این امر درک روابط میان چهارضلعی ها را با مشکل مواجه می نماید (فوجیتا، ۲۰۱۲؛ زیلکووا^{۱۳}، ۲۰۱۵؛ زیبک^{۱۴}، ۲۰۱۷؛ برونهیرا و پونته، ۲۰۱۹؛ البهاری و همکاران^{۱۵}، ۲۰۲۳؛ سیبولسکی و همکاران، ۲۰۲۴). هر مفهوم دارای یک یا چند نمونه اولیه است که در فرآیند یاددهی - یادگیری اغلب در ابتدا ارائه می شود. نمونه های اولیه زیرمجموعه مثال هایی با طولانی ترین فهرست ویژگی ها هستند که ویژگی های بصری قوی نیز دارند (هرشکویتز^{۱۶}، ۱۹۹۰). برای مثال، بسیاری از

¹ National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)

² Van de Wall & et al

³ Miller

⁴ Brunheira & Ponte

⁵ Altiparmak & Gurcan

⁶ Akar & Isiksal

⁷ Cybulski & et al

⁸ Pagiling & Nur'aini

⁹ Fujita

¹⁰ Nggaba & Ndakularak

¹¹ Macit & Tabak

¹² Prototype phenomenon

¹³ Zilkova

¹⁴ Zeybek

¹⁵ Elbehary & et al

¹⁶ Hershkowitz

افراد مستطیل را به عنوان «چهارضلعی با زوایای قائمه که دو ضلع بلند و دو ضلع کوتاه دارد» تعریف می‌کنند که این الگوی بصری یک نمونه اولیه از مستطیل است و لذا در پذیرش مربع به عنوان مستطیل مردد هستند (فوجیتا و جونز^{۱۷}، ۲۰۰۷)

آشنایی دانش‌آموزان با تعاریف چهارضلعی‌ها، تصور ذهنی آنها را از این شکل‌ها گسترش می‌دهد و در نتیجه میزان درک از آنها را ارتقا می‌بخشد (آوکو^{۱۸}، ۲۰۱۹). برای این که یک عبارت به عنوان یک تعریف ریاضی، مناسب باشد و بتواند نقش خود را در فعالیت‌های این حوزه به درستی ایفا نماید، نیاز است تا شامل مجموعه‌ای از شرایط لازم، کافی و حداقلی (مینیمال)^{۱۹} برای ایجاد و توسعه مفهوم مورد نظر باشد. میلر (۲۰۱۸)، این سه مشخصه اساسی که باید تعاریف ریاضی از آنها برخوردار باشند را معرفی می‌نماید. تعریفی شامل شرایط «لازم» است که ویژگی‌های اساسی یک مفهوم را توصیف نماید و هر یک از شرایط موجود در چنین تعریفی، برای همه اعضای مجموعه مورد نظر صدق می‌کند. مجموعه‌ای از شرایط در یک تعریف «کافی» هستند، اگر برقرار بودن آنها، عضو مجموعه مورد نظر شدن را ایجاب کند. تعاریف دارای شرایط «حداقلی» هیچ ویژگی اضافی و زائدی ندارند؛ یعنی ویژگی‌هایی را ذکر نمی‌کنند که قابل استنتاج از سایر شرایط ذکر شده در آن تعریف باشد.

در زمینه تعاریف ریاضی، دانستن ساختار و نقش‌های این تعاریف، یک جنبه مهم از دانش مورد نیاز و ابزاری ضروری جهت برقراری ارتباط ریاضی‌وار و انجام فعالیت‌های این حوزه است (شورای ملی معلمان ریاضی، ۲۰۰۰). در همین رابطه، دی‌ویلیرز و همکاران^{۲۰} (۲۰۰۹) و یوسسکین و همکاران^{۲۱} (۲۰۰۸) ضمن تأکید بر ارتباط متقابل تعاریف با طبقه‌بندی‌ها، دو نوع طبقه‌بندی را متمایز می‌کنند. بر این اساس، طبقه‌بندی مفاهیم می‌تواند به صورت افرازی^{۲۲} یا سلسله‌مراتبی^{۲۳} باشد که این دو نوع ساختار تعریف، دو تصور متفاوت از رابطه بین طبقه‌بندی انواع مفاهیم را منعکس می‌کنند. تعریف افرازی، ساختاری را برقرار می‌کند که مفاهیم درگیر در آن، از یکدیگر جدا هستند. ساختار چنین تعریفی، بخشی از اشیای کلی‌تر را به مجموعه‌ای از اشیاء خاص‌تر و مجزا از آن سایر بخش‌ها محدود می‌کند. مثالی از تعریف افرازی، معرفی دوزنقه به صورت «یک چهارضلعی با دقیقاً یک جفت اضلاع موازی» است که آن را از سایر چهارضلعی‌های خاص دیگر جدا می‌کند. اما در تعریف سلسله‌مراتبی، مفاهیم جزئی‌تر زیرمجموعه‌هایی از مفاهیم کلی‌تر را تشکیل می‌دهند. ساختار چنین تعریفی ارتباطات بین اشکال را در یک زنجیره سلسله‌مراتبی از مفاهیم کلی‌تر به جزئی‌تر ایجاد می‌کند. برای مثال، تعریف متداول متوازی‌الاضلاع «چهارضلعی که دو جفت ضلع موازی دارد» و تعاریف سایر چهارضلعی‌های خاص دیگر ایجاب می‌نماید که لوزی، مستطیل و مربع نیز انواع خاصی از متوازی‌الاضلاع باشند؛ زیرا هر یک دارای دو جفت اضلاع موازی هستند و لذا در تعریف متوازی‌الاضلاع صدق می‌کنند. به همین ترتیب، مربع نوعی مستطیل و نوعی لوزی نیز هست. هر دو طبقه‌بندی افرازی و سلسله‌مراتبی از نظر ریاضی و منطقی قابل قبول است، تنها دلیل ترجیح طبقه‌بندی سلسله‌مراتبی چهارضلعی‌ها در عملکرد و مزایای بیشتر آن نسبت به طبقه‌بندی افرازی نهفته است. برای مثال، تعاریف سلسله‌مراتبی منجر به ارائه تعاریف کوتاه‌تری از مفاهیم می‌شود و استخراج ویژگی‌های مفاهیم خاص‌تر را ساده می‌نماید. با این حال، در بعضی موقعیت‌ها نیاز به استفاده از تعاریف افرازی است تا مفهوم به طور واضح و دقیق تفکیک شود. برای مثال، باید از چهارضلعی‌های محدب و مقعر یک

¹⁷ Fujita & Jones

¹⁸ Avcu

¹⁹ necessary, sufficient and minimal conditions

²⁰ De Villiers & et al

²¹ Usiskin & et al

²² partitional

²³ hierarchical

طبقه‌بندی افزای ایجاد شود، زیرا معنا ندارد که یک چهارضلعی مقعر نوع خاصی از چهارضلعی محدب یا برعکس در نظر گرفته شود (دی ویلیرز و همکاران، ۲۰۰۹).

هنگام طبقه‌بندی چهارضلعی‌ها، استراتژی خودجوش و طبیعی برای بسیاری از افراد، ایجاد طبقه‌بندی‌هایی مبتنی بر تعاریف ذهنی افزای است (دی ویلیرز و همکاران، ۲۰۰۹). لذا، آنها مثلاً مربع‌ها را از مستطیل‌ها جدا می‌بینند. چنین تعاریفی ممکن است در برنامه‌های درسی پایه‌های تحصیلی پایین‌تر مطرح شوند و معمولاً با استدلال‌های ساده‌تری همراه هستند. از طرفی، تعاریف سلسله‌مراتبی به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد تا مفاهیم جدید را با افزودن شرایط جدید به یک مفهوم شناخته شده بیاموزند و یک شبکه مفهومی در میان آنها ایجاد نمایند ولی با وجود مزیت‌ها، روابط سلسله‌مراتبی اغلب با استدلال‌های پیچیده‌تری همراه هستند (میلر، ۲۰۱۸) و لذا درک طبقه‌بندی‌های مبتنی بر آنها، نیازمند سطوح بالاتر تفکر هندسی است (برگر و شاوونسی، ۲۰۱۸؛ کراولی، ۲۰۱۷؛ فایز و همکاران، ۲۰۱۸؛ فوجیتا، ۲۰۱۲). بنابراین، ارزیابی سطوح تفکر هندسی به ویژه در ارتباط با چهارضلعی‌ها از اهمیت خاصی برخوردار است. یکی از نظریه‌هایی که به ارزیابی سطوح تفکر هندسی دانش‌آموزان با تاکید بر چهارضلعی‌ها می‌پردازد، نظریه ون هیلی^{۲۷} است که بر اساس آن، یک دانش‌آموز طی فرآیند یادگیری مفاهیم هندسی با عبور از پنج سطح تفکر می‌تواند پیشرفت کند (ریحانی، ۱۳۸۴). این سطوح عبارتند از:

- **سطح ۱: تجسم^{۲۸}**. در این سطح، اشکال هندسی تنها با ظاهر فیزیکی خود تشخیص داده می‌شوند و اغلب با مقایسه آنها با «نمونه اولیه» شناخته می‌گردد (میسن^{۲۹}، ۲۰۰۹). دانش‌آموزان در سطح ۱ ون هیلی باید یاد بگیرند که اشکال در جهت‌های مختلف را تشخیص دهند و در دسته‌بندی‌هایی مرتب کنند (ماسر و همکاران، ۲۰۱۳).
- **سطح ۲: تجزیه و تحلیل^{۳۱}**. در این سطح، اشکال هندسی با استفاده از ویژگی‌های آنها مشخص و توصیف می‌شوند (کلمنتس^{۳۲}، ۲۰۰۳). از طرفی، دانش‌آموزان نمی‌توانند درک کنند که یک شکل ممکن است درون دسته دیگری از اشکال نیز قرار بگیرد (هالت^{۳۳}، ۲۰۰۸).
- **سطح ۳: استنتاج غیررسمی^{۳۴}**. در این سطح، روابط بین ویژگی‌ها و همچنین روابط میان اشکال درک و رده‌های اشکال تشخیص داده می‌شوند (کراولی، ۱۹۸۷). دانش‌آموزان می‌توانند اشکال را تنها با استفاده از مجموعه‌ای حدقلی از ویژگی‌های تعریف‌کننده طبقه‌بندی کنند. اثبات‌ها ممکن است شهودی‌تر از قیاسی باشند. با این حال، توانایی دنبال کردن یک استدلال منطقی وجود دارد (ون دی وال و همکاران، ۲۰۲۰).

²⁴ Burger & Shaughnessy

²⁵ Crowley

²⁶ Fuys & et al

²⁷ van Hiele

²⁸ visualization

²⁹ Mason

³⁰ Musser & et al

³¹ analysis

³² Clements

³³ Halat

³⁴ informal deduction

- **سطح ۴: استنتاج رسمی^{۳۵}**. در این سطح، قضایای هندسی درون یک دستگاه اصل موضوعی بنا نهاده می‌شوند و اصطلاحات تعریف نشده، اصول موضوع، تعریف‌ها، قضایا و همچنین روابط میان آنها درک می‌شوند (برگر و شاونسی، ۱۹۸۶؛ کراولی، ۱۹۸۷).
- **سطح ۵: دقت^{۳۶}**. در این سطح، قضایا در سیستم‌های اصل موضوعی متفاوت، طرح و تجزیه و تحلیل می‌شوند (کراولی، ۱۹۸۷؛ فایز و همکاران، ۱۹۸۸).

آگاهی از سطح درک و استدلال هندسی دانش‌آموزان به کمک نظریه ون‌هیلی می‌تواند زمینه‌ساز تنظیم و تدوین مواد درسی و طراحی فعالیت‌های آموزشی متناسب با سطح توانایی دانش‌آموزان گردد (یافتیان و صفابخش، ۱۳۹۸). به بیان دیگر، سلسله مراتب نظریه تفکر هندسی ون‌هیلی علاوه بر ارزیابی سطوح تفکر هندسی، می‌تواند به عنوان راهنمایی موثر برای تدوین برنامه درسی هندسه و محتوای آموزشی غنی به کار رود (آلتیپارماک و گورکان، ۲۰۲۱). در فرآیند آموزش، کتاب‌های درسی نقش تاثیرگذاری در امر آموزش و یادگیری ایفا می‌کنند (فن و همکاران^{۳۷}، ۲۰۱۳) و یکی از مهم‌ترین منابعی هستند که معلمان و دانش‌آموزان را تحت تاثیر قرار می‌دهند (مورگان^{۳۸}، ۲۰۰۶؛ هادار^{۳۹}، ۲۰۱۷؛ آوکو^{۴۰}، ۲۰۱۹؛ رضات و همکاران^{۴۱}، ۲۰۲۱). لذا، کتاب‌های درسی نه تنها نقش مهمی در حمایت از تغییر شیوه‌های آموزشی معلمان دارند بلکه اجرا یا حفظ برنامه‌های درسی جدید را نیز تسهیل می‌نمایند و تحقیقات مرتبط با نحوه ارائه محتوا در کتاب‌های درسی می‌تواند بر اصلاحات برنامه درسی تاثیر بگذارد (فن و همکاران، ۲۰۲۵) که بین برنامه درسی و عملکرد معلمان نیز همسویی وجود دارد (ارساندو^{۴۲}، ۲۰۲۶).

اگر چه به گواه پژوهش‌های متعدد، در خصوص درک مفاهیم هندسی، موضوعات مرتبط با چهارضلعی‌ها یکی از چالش‌برانگیزترین آنها است (برای مثال، آلتیپارماک و گورکان، ۲۰۲۱؛ آکار و ایسیکسال، ۲۰۲۲؛ سیبولسکی و همکاران، ۲۰۲۴)، بررسی پژوهش‌های انجام شده حاکی از توجه بیشتر به ارزیابی سطوح تفکر هندسی دانش‌آموزان بر اساس چارچوب نظریه ون‌هیلی نسبت به تحلیل سطوح هندسی محتوای کتاب‌های درسی است. برای مثال، در پژوهش آلتیپارماک و گورکان (۲۰۲۱) تعاریف، اشتباهات، بدفهمی‌ها و سطوح تفکر ون‌هیلی دانش‌آموزان پایه چهارم درباره اشکال هندسی مربع، مستطیل و مثلث بررسی شد که یافته‌های این پژوهش نشان داد، سطح تفکر هندسی اکثر دانش‌آموزان پایه چهارم در سطح تجسم یعنی سطح ۱ ون‌هیلی هستند و تعاریف ارائه شده توسط دانش‌آموزان، عمدتاً به صورت افرازی اند. همچنین، پژوهش عالمیان و همکاران (۱۳۹۷) به شناسایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه هشتم در به‌کارگیری مهارت‌های هندسی و استفاده از نظریه ون‌هیلی برای ارتقا و بهبود سطح این مهارت‌ها در دانش‌آموزان می‌پردازد. نتایج بدست آمده از این پژوهش نشان داد که اغلب دانش‌آموزان خطاهای متعددی در مباحث هندسه دارند و اگر معلمان از نظریه ون‌هیلی در جهت آموزش مفاهیم و مهارت‌های هندسی بهره بگیرند تا حدی بدفهمی‌های دانش‌آموزان کاهش می‌یابد. از طرفی، پژوهش‌هایی که مشخصاً کتاب‌های درسی دوره ابتدایی را از منظر سطوح هندسی نظریه ون‌هیلی مورد تحلیل قرار داده باشند، یافت نشد و در سایر مقاطع تحصیلی نیز بسیار اندک بود. از این میان، می‌توان به پژوهش کالیانکار^{۴۳} (۲۰۱۹) اشاره کرد که به مطالعه

³⁵ formal deduction

³⁶ rigor

³⁷ Fan & et al

³⁸ Morgan

³⁹ Hadar

⁴⁰ Avcu

⁴¹ Rezat & et al

⁴² Ersando

⁴³ Kalyankar

تطبیقی محتوای برنامه درسی، مبتنی بر نظریه ون هیلی در کتاب های درسی ریاضی پیش دبستانی تا پایه هشتم ایالت های آمریکا می پردازد. نتایج نشان داد، مهارت هایی که در اسناد استانداردهای برنامه درسی کتاب های پیش دبستانی تا پایه پنجم، سطوح ۱ و ۲ و ۳ ون هیلی را شامل می شدند. پژوهش عبدالله و شین (۲۰۱۹) نیز به مطالعه تطبیقی چهارضلعی ها در دو کتاب درسی ریاضی دوره متوسطه اول مالزی و کره جنوبی می پردازد که آرایش محتوای هندسی مبحث چهارضلعی ها را بر اساس نظریه ون هیلی مورد بررسی قرار می دهد که مدلی موثر برای یادگیری در چینش محتوای هندسی است. پژوهش جاناه و همکاران^{۴۴} (۲۰۲۴) به مطالعه تحلیل توالی مطالب مرتبط با مساحت سطح مکعب ها در کتاب ریاضی پایه هشتم اندونزی پرداخته است. این مطالعه به روش تحلیل محتوای کیفی صورت گرفته است و نتایج آن نشان داد که مطالب مربوط به مفهوم مساحت سطح مکعب ها براساس نظریه ون هیلی مرتب نشده اند و در هر سطح ون هیلی فعالیت های ناقصی ارائه شده است و سطح تحلیل مطالب کتاب درسی تا سطح استنتاج غیررسمی یعنی سطح ۳ ون هیلی می رسد. هم چنین، پژوهش یافتیان و صفابخش (۱۳۹۸) به تحلیل محتوای هندسه پایه هشتم با تمرکز بر چهارضلعی ها بر اساس سطوح تفکر هندسی ون هیلی می پردازد و نتایج آن نشان داد که سطوح غالب مسائل مرتبط با چهارضلعی ها در کتاب ریاضی پایه هشتم، سطوح ۲ یا ۳ ون هیلی است. محتوای بررسی شده دربردارنده تعریف های ریاضی از شکل های هندسی، مفهوم تداخل رده های شکل های هندسی، استدلال های تک گام و اثبات های استنتاجی است که درک این موارد نیازمند برخورداری از توانایی استدلال در سطح سوم ون هیلی است.

با توجه به نقش اساسی کتاب های درسی ریاضی در امر آموزش و یادگیری به ویژه کتاب های ریاضی دوره ابتدایی به عنوان سنگ بنای ساخت مفاهیم اساسی در ذهن دانش آموزان، تجزیه و تحلیل کتاب های درسی می تواند تصویر واضح تری از محتوای آموزشی را نشان دهد. همان طور که بیان شد، تحقیقات خارجی متعددی فهم تعاریف چهارضلعی ها را در میان گروه های مختلف یادگیرندگان بررسی نموده اند؛ اما کمبود تحقیقات داخلی و حتی خارجی در زمینه انعکاس سطوح تفکر هندسی ون هیلی در محتوای کتاب های درسی پیرامون مفهوم چهارضلعی ها به ویژه در دوره ابتدایی مشهود است. بنابراین، پژوهش حاضر بر آن است تا گامی در جهت رفع این شکاف پژوهشی بردارد. لذا آگاهی آموزشگران ریاضی و مولفان کتاب های درسی از یافته های این پژوهش، می تواند کمک نماید تا آموزش های مؤثرتر و کتاب های درسی کارآمدتری را در این زمینه فراهم نمایند. در این پژوهش به سوال زیر پاسخ داده می شود:

سوال پژوهش: روند ارائه محتوای مرتبط با چهارضلعی ها و سطوح ون هیلی متناسب با آن در کتاب های ریاضی دوره ابتدایی چگونه است؟

روش پژوهش

پژوهش حاضر، یک پژوهش توصیفی- تحلیلی با رویکرد کیفی است و با توجه به اینکه کتاب های درسی می تواند بازتابی از دیدگاه های مولفان و طراحان آموزشی در خصوص سطح تفکر مورد انتظار از دانش آموزان در یک دوره تحصیلی باشد، هدف پژوهش حاضر، تحلیل افقی به منظور شناسایی و توصیف سطوح تفکر هندسی ون هیلی در محتوای آموزشی مرتبط با چهارضلعی ها در هر پایه و تحلیل عمودی برای بررسی روند ارائه محتوای مرتبط با چهارضلعی ها و تکامل سطوح تفکر ون هیلی متناسب با آن به تفکیک کتاب های ریاضی دوره ابتدایی است. کتاب های مورد بررسی، کتاب های درسی ریاضی دوره ابتدایی ایران چاپ سال ۱۴۰۴ است و به صورت هدفمند، بخش های مرتبط با چهارضلعی ها از این کتاب ها انتخاب شدند. واحد تحلیل در پژوهش حاضر، محتوای متن کتاب های درسی که حاوی یک مفهوم مشخص و مرتبط با معرفی، ویژگی ها و روابط میان چهارضلعی ها است. در این راستا، تمامی فعالیت ها،

تمرین‌ها، مثال‌ها و تصاویر به عنوان واحدهای معنایی و بخش یا فصل‌های کتاب‌های درسی ریاضی به عنوان واحد زمینه طبق ترتیب و توالی صفحات آن‌ها انتخاب گردید. جهت تحلیل و طبقه‌بندی محتوای مرتبط با چهارضلعی‌ها، با بررسی پیشینه موضوع و مبانی نظری، شاخص‌ها و نشانه‌های کلیدی هر یک از سطوح ون‌هیلی شناسایی و در جدول ۱ استخراج گردید. از آنجا که در این مطالعه شاخص‌ها از قبل تعیین شده‌اند و پژوهشگران به دنبال یافتن مصادیق آنها در محتوای مورد نظر هستند، نحوه کدگذاری، قیاسی محسوب می‌شود.

جدول ۱: بررسی شاخص‌ها و نشانه‌های کلیدی به همراه نمونه‌های متناظر با سطوح تفکر ون‌هیلی

سطوح	شاخص‌ها و نشانه‌های کلیدی	نمونه
سطح ۱	شناسایی اشکال بر اساس ویژگی‌های ظاهری (فایز و همکاران، ۱۹۸۸)	- تشخیص اشکال در صفحات شطرنجی - ارائه تعاریف بصری
	دسته بندی اشکال بر اساس ویژگی‌های ظاهری (کراولی، ۱۹۸۷؛ میسن، ۲۰۰۹)	- یافتن شباهت با الگوهای دنیای واقعی
	رسم و ساختن تصاویر اشکال هندسی (کراولی، ۱۹۸۷؛ فایز و همکاران، ۱۹۸۸)	- صفحات نقطه‌ای، صفحات شطرنجی، کاغذهای شفاف - دست‌ورزی، اندازه‌گیری، تا کردن، رنگ کردن و ساخت اشکال هندسی - ساخت الگوهای کاشی‌کاری با استفاده از قطعات چندضلعی‌ها
	نامگذاری اشکال و یادگیری برخی از واژه‌های هندسی (فایز و همکاران، ۱۹۸۸)	- نامگذاری زوایا به عنوان گوشه اشکال
	حل مسائل مرتبط با مدیریت اشکال هندسی (کراولی، ۱۹۸۷؛ فایز و همکاران، ۱۹۸۸)	- ساخت چهارضلعی‌ها با استفاده از قطعات تانگرام، چوب کبریت
سطح ۲	بررسی ویژگی‌های اشکال در غیاب تعاریف ریاضی آن‌ها (فایز و همکاران، ۱۹۸۸؛ کلمنتس، ۲۰۰۳؛ میسن، ۲۰۰۹)	- کشف ویژگی‌ها به کمک استدلال‌های شهودی و تجربی - تعاریف مبتنی بر ارائه فهرست ویژگی‌ها
	توصیف ویژگی‌ها با استفاده از زبان مناسب (فایز و همکاران، ۱۹۸۸)	- بیان روابط برابری، توازی، تعامد و ... بین اجزای شکل
	مقایسه اشکال با استفاده از ویژگی‌ها (فایز و همکاران، ۱۹۸۸)	- مقایسه اضلاع و زوایای مربع و مستطیل
	رسم شکل با داشتن ویژگی‌های مشخص (فایز و همکاران، ۱۹۸۸)	- رسم چهارضلعی با چهارضلع برابر

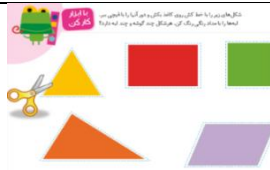
سطوح	شاخص ها و نشانه های کلیدی	نمونه
سطح ۳	سازماندهی ویژگی ها و صورت بندی تعاریف ریاضی (برگر و شاونسی، ۱۹۸۶؛ کراولی، ۱۹۸۷؛ فایز و همکاران، ۱۹۸۸)	- شکل گیری تعاریف اشکال و توانایی پذیرش عبارت های معادل با تعاریف - تعاریف سلسله مراتبی مبتنی بر طبقه بندی اشکال بر اساس ارتباط ویژگی ها - ارائه ویژگی های حداقلی اشکال
	ارائه استدلال های استنتاجی غیر رسمی (کراولی، ۱۹۸۷؛ فایز و همکاران، ۱۹۸۸)	- توسعه طبقات اشکال به کمک ترکیب ویژگی ها - ترکیب نتایج تجربی با تکنیک های استنتاجی - ارائه روشی برای رسم اشکال هندسی با استفاده از روابط بین ویژگی ها
	درک اثبات های رسمی (برگر و شاونسی، ۱۹۸۶؛ کراولی، ۱۹۸۷؛ فایز و همکاران، ۱۹۸۸؛ پیوزی ^{۴۵} ، ۲۰۰۳)	- توانایی تشخیص رویکرد استنتاجی مسائل - تشخیص (غیررسمی) شرایط لازم و کافی ویژگی ها برای ایجاد یک مفهوم - عدم توانایی ساخت اثبات در دستگاه اصل موضوعی

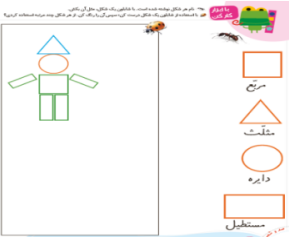
ابزار گردآوری داده ها، فرم های تحلیل محتوای محقق ساخته بود که برای اطمینان از روایی آن از دیدگاه های ۴ متخصص در زمینه آموزش ریاضی کمک گرفته شد تا نظرات اصلاحی و تاییدی خود را در خصوص پوشش دهی محتوا متناسب با سطوح ون هیلی و هم چنین وضوح و کاربردی بودن فرم ها اعمال نمایند. پس از اعمال اصلاحات و تایید روایی محتوایی و صوری ابزار گردآوری داده ها، در تحلیل افقی کل صفحات کتاب های درسی هر پایه مورد بررسی قرار گرفت تا واحدهای معنایی که به طور مستقیم یا غیرمستقیم به چهارضلعی ها مرتبط هستند شناسایی، توصیف و سطوح تفکر هندسی آن ها در تطابق با شاخص های سطوح ون هیلی مشخص شوند، سپس در تحلیل عمودی، روند و آرایش محتوا همه واحدهای معنایی بررسی شد تا مشخص شود کتاب های درسی چگونه دانش آموزان را به سمت سطوح بالاتر ون هیلی هدایت می نمایند. لازم به توضیح است که با اقتباسی از کالیانکار (۲۰۱۹) اگر انجام کامل یک فعالیت مستلزم تفکر در دو سطح مختلف ون هیلی باشد، سطح بالاتر به آن اختصاص داده می شود. برای مثال، فعالیتی که از دانش آموزان می خواهد یک چهارضلعی رسم کنند که اضلاع مقابل آن موازی باشند، به تفکر بیش از سطح ۱ نیاز دارد، بنابراین چنین محتوایی به عنوان سطح ۲ کدگذاری شد. به منظور بررسی پایایی، کدگذاری سطوح تفکر هندسی ون هیلی متناسب با محتوا توسط دو نفر از پژوهشگران به صورت مستقل تحلیل و دسته بندی شد، سپس موارد عدم توافق شناسایی و فهرست بندی شد و با بازبینی مجدد کدها و مشورت با نفرت بعدی به اجماع بر سر موارد اختلافی دست یافتند و برای تایید پایایی از فرمول ضریب کاپای کوهن بر روی کل داده ها استفاده شد که در این پژوهش میزان توافق بین ارزیابان عدد ۰/۸۸ بدست آمد. یافته های پژوهش در قالب جداول توالی یافته شامل مضمون های متمایز و نمونه محتوا به همراه سطح ون هیلی متناسب با آن، که روند ارائه و توزیع سطوح ون هیلی را در هر پایه تحصیلی نشان می دهد، ارائه گردید.

یافته‌های پژوهش

برای پاسخ به سوال پژوهش، محتوای ارائه شده در هر بخش از کتاب ریاضی پایه اول و هر فصل از کتاب‌های ریاضی پایه‌های دوم تا ششم، بررسی گردید تا محتوای مرتبط با چهارضلعی‌ها مشخص و سپس مبتنی بر نظریه ون‌هیلی مورد تحلیل قرار گیرد. در کتاب‌های ریاضی پایه‌های اول تا ششم به تفکیک هر پایه در جداول ۲ تا ۷ معرفی و به همراه نمونه‌هایی از مضمون‌های متمایز محتوای ذکر شده (و نه محتوای کامل) متناسب با سطوح تفکر ون‌هیلی نمایش داده می‌شود. کتاب ریاضی پایه اول (در بخش‌های ۱، ۴، ۵، ۶، ۷، ۱۴، ۱۸ و ۲۴) متناسب با سطح ۱ ون‌هیلی بر شناسایی شهودی و معرفی ویژگی‌های اولیه شکل‌های هندسی متمرکز است (جدول ۲).

جدول ۲: روند ارائه محتوای مرتبط با چهارضلعی‌ها در کتاب ریاضی پایه اول

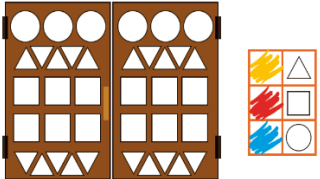
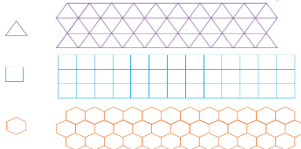
مضمون محتوا	نمونه محتوا	سطح ون‌هیلی
شناسایی شکل‌های هندسی مثل هم	 (بخش ۱، ص. ۳)	سطح ۱
معرفی غیررسمی راس و ضلع (گوشه و میله)	 (بخش ۴، ص. ۲۳)	سطح ۱
بررسی تعداد گوشه و لبه شکل‌های هندسی	 (بخش ۵، ص. ۳۵)	سطح ۱
رسم شکل‌های هندسی به کمک شابلون	 (بخش ۷، ص. ۴۹)	سطح ۱

مضمون محتوا	نمونه محتوا	سطح ون هیلی
ارائه نام شکل های هندسی		سطح ۱

بر اساس جدول ۲، دانش آموزان باید شکل های هندسی مثل هم را شناسایی و شمارش کنند و اشیایی مشابه شکل های داده شده را در فضای پیرامونی تشخیص دهند. در ادامه، توجه دانش آموزان به شکل های هندسی جلب می شود و با استفاده از گوشه و میله در اشکال هندسی (واژگان غیررسمی همسو با سطح ۱ ون هیلی برای رأس و ضلع)، راس و ضلع معرفی می گردد. سپس، دانش آموزان به کمک دست ورزی با ابزار و اشیای ملموس مانند کاغذ رنگی و قیچی به شناسایی گوشه و لبه های شکل های هندسی به بیان شباهت ها و تفاوت ها می پردازند. در ادامه، مهارت چگونگی استفاده از شابلون برای رسم شکل های هندسی و تکمیل الگوهای متقارن ارائه می شود. در نهایت، نام شکل های مربع، مثلث، دایره و مستطیل و رسم آنها به کمک شابلون و هم چنین تفاوت ها و شباهت های آنها ارائه می گردد. کتاب ریاضی پایه دوم (در فصل های ۳ و ۵) با گذار از شناسایی شهودی ویژگی های ظاهری سطح ۱ ون هیلی به ویژگی های اجزا و مولفه های شکل ها در سطح ۲ ون هیلی توجه می شود (جدول ۳).

جدول ۳: روند ارائه محتوای مرتبط با چهارضلعی ها در کتاب ریاضی پایه دوم

مضمون محتوا	نمونه محتوا	سطح ون هیلی
یادآوری شکل های هندسی و ارائه عبارت «ضلع»		سطح ۱
رسم مربع و مستطیل به کمک شابلون	۱- به کمک شابلون دو شکل مربع و مستطیل رسم کنید و بیان کنید چه تفاوت ها و چه شباهت هایی دارند؟ تفاوت : شباهت : (فصل ۳، کار در کلاس ۱، ص. ۳۹)	سطح ۱

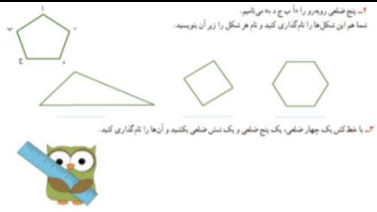
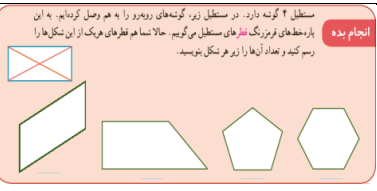
مضمون محتوا	نمونه محتوا	سطح ون هیلی
تشخیص شکل‌های هندسی در الگوهای متقارن	۲- با توجه به جدول زیر شکل‌ها را رنگ کنید تا یک پنجره زیبا درست شود.  (فصل ۳، تمرین ۲، ص. ۴۰)	سطح ۱
ساخت مربع به کمک قطعات تانگرام	شکل مربع انتهایی کتاب را با قیچی ببرید و روی خط‌های رسم شده را نیز قیچی کنید. حالا مربع شما به ۷ تکه تقسیم شده است.  (فصل ۳، فعالیت، ص. ۴۱)	سطح ۱
تشخیص شکل‌های هندسی در الگوهای کاشی کاری	از یکی از شکل‌های سمت چپ ۱۰ تا ۱۵ کاغذ فور یا مقوا ببرید. با کنار هم قرار دادن آن‌ها شکل‌های مختلف بسازید. مانند شکل‌هایی را که ساخته‌اید. در پایین رنگ‌ها کنید.  با تعداد زیاد هر کدام از شکل‌های مثلث، مربع و شش‌ضلعی می‌توانید یک سطح را به‌طور کامل بپوشانید. به این عمل پوشاندن سطح یا کاشی‌کاری می‌گویند. با ترکیب شکل‌های مختلف نیز می‌توان یک سطح را پوشاند. در ساختمان‌های مساجد و زیارتگاه‌ها این نوع کاشی‌کاری‌ها فراوان دیده می‌شود. (فصل ۳، کار در کلاس، ص. ۴۲)	سطح ۱
رسم چهارضلعی	۱- نقطه‌ها را با خط کش به هم وصل کنید و شکلی را که توضیح داده شده است، رسم کنید.  ۲- شمع ۳ گوشه دارد. ۳- شمع ۴ گوشه دارد. ۴- شمع ۴ گوشه دارد. ۵- شمع ۴ گوشه دارد. (فصل ۳، تمرین ۱، ص. ۴۳)	سطح ۲
بررسی برابری اضلاع مقابل در مستطیل	۴- طول ضلع‌های مستطیل‌های زیر را با خط‌کش اندازه بگیرید. با دیدن اندازه‌ی ضلع‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟  (فصل ۵، تمرین ۶، ص. ۸۹)	سطح ۲

همانطور که جدول ۳ نشان می‌دهد، فصل ۳ (اشکال هندسی) با یادآوری مفاهیم پایه اول شامل شناخت و رسم شکل‌های هندسی به کمک شابلون، و بررسی تعداد ضلع و گوشه، آغاز و چندضلعی نیز معرفی می‌شود. البته، این معرفی ماهیت یک تعریف ریاضی را ندارد و مبتنی بر چند نمونه از آن صورت می‌گیرد. عدم ارائه تعریف رسمی می‌تواند مبتنی بر تناسب سطح تفکر متوسط دانش‌آموزان و پرهیز از شتاب‌زدگی در ارائه محتوا باشد. از طریق استدلال استقرایی بررسی می‌شود که آیا در چندضلعی‌ها تعداد گوشه‌ها و ضلع‌ها برابر هستند. در ادامه، رسم مربع و مستطیل به کمک شابلون و بررسی شباهت‌ها و تفاوت‌های آنها بر اساس ویژگی‌های ظاهری شکل آنها ارائه می‌شود. تشخیص شکل‌های هندسی با استفاده از کاوش در الگوهای متقارن و الگوهای کاشی‌کاری مطرح می‌گردد. دانش‌آموزان به کمک دست‌ورزی با مقوا به ساخت شکل‌های مثلث، مربع و شش‌ضلعی می‌پردازند تا آنها را در الگوهای کاشی‌کاری به کار ببرند. هم‌چنین، جداسازی و کنار هم قرار دادن قطعات تانگرام مربعی، به منظور ساخت مجدد مربع، انجام و ساختن هر شکل ممکن دیگر با قطعات آن نیز خواسته می‌شود که چنین فعالیت‌های دست‌ورزی به عنوان پل ارتباطی برای گذار دانش‌آموز از سطح

۱ به سطح ۲ ون هیلی عمل می نمایند. در ادامه، رسم شکل هندسی با خط کش به کمک نقاط داده شده و با ویژگی های مشخص ارائه شده است. در پایان فصل ۵ (اندازه گیری) دانش آموزان با اندازه گیری اضلاع مقابل هم در مستطیل به کمک خط کش، ویژگی برابری جفت اضلاع مقابل را نتیجه می گیرند. کتاب ریاضی پایه سوم (در فصل های ۳، ۴ و ۵) با ارائه ویژگی های نوع زوایا، برابری و توازی اضلاع در مستطیل به تثبیت محتوای متناسب با سطح ۲ ون هیلی می پردازد (جدول ۴).

جدول ۴: روند ارائه محتوای مرتبط با چهار ضلعی ها در کتاب ریاضی پایه سوم

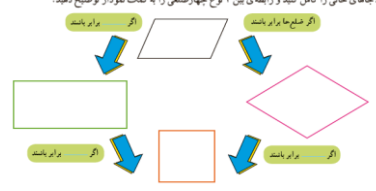
مضمون محتوا	نمونه محتوا	سطح ون هیلی
معرفی زاویه قائمه در مستطیل	ظرفی بزرگ ساعت ۱۵ دقیقه حرکت کرده است. زاویه حرکت این ظرف را زاویه راست یا زاویه قائمه می گویند. زاویه های یک مستطیل چه نوع زاویه های هستند؟ مستطیل چند زاویه دارد؟ (فصل ۳، ص. ۵۵)	سطح ۲
بررسی زوایای قائمه در ذوزنقه قائم الزاویه	۵- شکل روبه رو چند زاویه دارد؟ زاویه راست آن را مشخص کنید. (فصل ۳، تمرین ۵، ص. ۵۹)	سطح ۲
معما ساخت چند ضلعی ها با چوب کبریت ها	سرگرمی و معما ۱- شکل روبه رو را با چوب کبریت بسازید. چهار چوب کبریت را حرکت دهید تا دو مربع بوجود آید. (مربع ها هم اندازه هستند.) ۲- سه چوب کبریت را حرکت دهید و جایه جا کنید تا چهار مربع یک اندازه بوجود آید. ۳- شش چوب کبریت را جایه جا کنید تا چهار مثلث و یک منش ضلعی بوجود آید. در هر سوال، شکلی را که بوجود می آید بکشید. (فصل ۳، ص. ۶۰)	سطح ۲
معرفی ویژگی موازی بودن اضلاع روبه رو در مستطیل	دیدید که گوشه های مستطیل زاویه های راست هستند. دو ضلع مستطیل روبه رو را با خط کشی ادامه داده ایم. به این خط های موازی می گویند. این خط ها هیچ وقت یکدیگر را قطع نمی کنند. حالا دو ضلع دیگر مستطیل را با خط کشی ادامه دهید. آیا خط هایی که کشیده اید موازی هستند؟ (فصل ۴، ص. ۷۳)	سطح ۲
معرفی ویژگی برابری ضلع های روبه رو در مستطیل	ضلع های این دو مستطیل را اندازه بگیرید. آیا ضلع های روبه رو، مساوی هستند؟ به کمک نتیجه ی مسئله ی بالا توضیح دهید که اندازه ی ضلع قرمز رنگ چگونه به دست می آید. (فصل ۴، ص. ۷۵)	سطح ۲

مضمون محتوا	نمونه محتوا	سطح ون هیلی
نامگذاری رئوس چندضلعی‌ها	 ۳. یک پنج ضلعی روبه‌رو را با یک دو بیضی می‌کنیم. آنها هم این شکل‌ها را نامگذاری کنید و نام هر شکل را زیر آن بنویسید. ۴. با خط کش یک چهار ضلعی، یک پنج ضلعی و یک شش ضلعی بکشید و آن‌ها را نامگذاری کنید. (فصل ۵، تمرین ۲ و ۳، ص. ۸۴)	سطح ۲
معرفی قطر در مستطیل	 مستطیل ۴ گوشه دارد. در مستطیل زیر، گوشه‌های روبه‌رو را به هم وصل کردیم. به این پاره‌خط‌های قرمز رنگ قطر های مستطیل می‌گوییم. حالا شما هم قطری که از این شکل‌ها را رسم کنید و تعداد آن‌ها را زیر هر شکل بنویسید. (فصل ۵، ص. ۸۴)	سطح ۲

طبق جدول ۴، در فصل ۳ (عددهای کسری) در کادر «کامل کن» بعد از معرفی زاویه راست یا زاویه قائمه، نوع و تعداد زوایای مستطیل مطرح می‌گردد. در ادامه، دانش‌آموزان باید تعداد زوایای موجود در دوزنقه قائم‌الزاویه (بدون نام بردن از این چهارضلعی) را بررسی و زوایای قائمه آن را مشخص کنند. در معمای این فصل، فعالیت‌هایی در راستای دست‌ورزی و اکتشاف چندضلعی‌ها با استفاده از چوب کبریت‌ها مطرح می‌شود و نیز با جابه‌جایی چوب کبریت‌ها به ساخت مثلث، مربع و شش‌ضلعی می‌پردازند. فصل ۴ (ضرب و تقسیم) با یادآوری زوایای قائمه در مستطیل، خطوط موازی را از طریق ویژگی امتداد ضلع‌های روبه‌روی مستطیل معرفی می‌نماید. معرفی مفهوم انتزاعی موازی بودن نه به طور مستقل بلکه از طریق اضلاع مقابل در مستطیل (به عنوان اجزایی از یک شکل هندسی آشنا) می‌تواند یک راهبردی آموزشی در سطح تجزیه و تحلیل (سطح ۲) ون هیلی باشد. در ادامه، برای نخستین بار عبارات «طول» و «عرض» در کتاب‌های درسی (بدون توصیف کلامی) ظاهر و ویژگی برابری اضلاع روبه‌رو در مستطیل با اندازه‌گیری ارائه می‌شود. در فصل ۵ (محیط و مساحت) نحوه نامگذاری رئوس چندضلعی‌ها به کمک حروف الفبا معرفی می‌شود و دانش‌آموزان به رسم چهارضلعی، پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی با استفاده از خط‌کش و نامگذاری رئوس آنها می‌پردازند. در ادامه، مفهوم «قطر» در مستطیل به عنوان پاره‌خط واصل گوشه‌های روبه‌رو معرفی می‌گردد و به بررسی قطرهای سایر چندضلعی‌ها نیز تعمیم می‌یابد. البته باید توجه داشت که با وجود معرفی ویژگی‌های جدید، به دلیل عدم ایجاد ارتباط میان این ویژگی‌ها، همچنان از ساختار سلسله‌مراتبی پرهیز شده است. کتاب ریاضی پایه چهارم (در فصل ۶) با معرفی دوزنقه و همچنین بررسی ویژگی‌ها و روابط سلسله‌مراتبی طبقات متوازی‌الاضلاع‌ها بیشترین تأکید محتوایی را بر سطح ۳ ون هیلی دارد (جدول ۵).

جدول ۵: روند ارائه محتوای مرتبط با چهار ضلعی ها در کتاب ریاضی پایه چهارم

مضمون محتوا	نمونه محتوا	سطح ون هیلی
بررسی ضلع های موازی و غیرموازی در اشکال	۱- هر یک از اشکال های زیر از چهار بار خط درست شده است. اشکال آخر را طوری رسم کنید که با بقیه متفاوت باشد. (فصل ۶، فعالیت ۱، ص. ۱۲۶)	سطح ۲
معرفی الگوهای بصری دوزنقه و متوازی الاضلاع	۲- اشکال های را که فقط دو ضلع موازی دارند، به رنگ آبی، اشکال های را که ضلع های دو به دو موازی دارند به رنگ سبز و اشکال های را که ضلع موازی ندارند به رنگ قرمز کنید. (فصل ۶، فعالیت ۲، ص. ۱۲۶)	سطح ۲
معرفی دوزنقه	۳- در اشکال های روبه رو دو ضلع موازی را رنگ کنید. به این شکل دوزنقه گفته می شود. (فصل ۶، فعالیت ۳، ص. ۱۲۶)	سطح ۲
معرفی متوازی الاضلاع	۴- در اشکال های روبه رو ضلع های موازی را دو به دو هم رنگ کنید. به این شکل ها متوازی الاضلاع گفته می شود. (فصل ۶، فعالیت ۴، ص. ۱۲۶)	سطح ۲
رسم دوزنقه و متوازی الاضلاع با کمک دو خط داده شده	۵- دو خط روبه رو، موازی اند. یک دوزنقه و یک متوازی الاضلاع روی آنها رسم کنید. (فصل ۶، فعالیت ۵، ص. ۱۲۶)	سطح ۲
ویژگی برابری زوایای روبه رو در متوازی الاضلاع	۶- در شکل مقابل خط های ۱ و ۲ موازی اند. خط های ۳ و ۴ هم موازی اند. چهار ضلعی ایجاد شده چه نام دارد؟ با توجه به اندازه ی یکی از زاویه ها که نوشته شده است، اندازه ی سه زاویه ی دیگر داخل چهار ضلعی را بنویسید. توضیح دهید که چگونه به کمک موازی بودن خطوط، اندازه ی بقیه زاویه ها را پیدا کردید. (فصل ۶، کار در کلاس ۲، ص. ۱۲۷)	سطح ۳
ویژگی های چهار ضلعی هایی که اضلاع مقابل آنها با هم موازی اند	۷- در اشکال های زیر، همه ی ضلع ها و زوایا را اندازه گیری کنید و روی آنها بنویسید. با مقایسه ی اندازه ها چه نتیجه ای می گیرید؟ ضلع های زیر را کشید. ... در هر متوازی الاضلاع، ضلع های روبه رو با هم ... هستند. ... در هر متوازی الاضلاع، زوایای روبه رو با هم ... هستند. ۸- در اشکال های زیر هم ضلع های مقابل با هم موازی اند. آیا آنها هم دو ویژگی بالا را دارند؟ اندازه بگیرید و بررسی کنید. (فصل ۶، فعالیت، ص. ۱۲۷)	سطح ۲
بررسی ویژگی های مستطیل، لوزی و مربع	۹- در مستطیل، ضلع های روبه رو با هم موازی اند. این شکل، علاوه بر ویژگی های متوازی الاضلاع، چه ویژگی دیگری دارد؟ ۱۰- در لوزی، ضلع های روبه رو با هم موازی اند. این شکل، علاوه بر ویژگی های متوازی الاضلاع، چه ویژگی دیگری دارد؟ ۱۱- در مربع، ضلع های روبه رو با هم موازی اند. این شکل، علاوه بر ویژگی های متوازی الاضلاع، چه ویژگی دیگری دارد؟ (فصل ۶، فعالیت، ص. ۱۲۸)	سطح ۲

مضمون محتوا	نمونه محتوا	سطح ون هیلی
طبقه‌بندی سلسله‌مراتبی چهارضلعی‌ها	۴- جاهای خالی را کامل کنید و رابطه ی بین ۴ نوع چهارضلعی را به کمک نمودار توضیح دهید.  (فصل ۶، فعالیت ۴، ص. ۱۲۸)	سطح ۳
دست‌ورزی با مثلث‌های ایجاد شده به وسیله قطرها در چهارضلعی‌ها	۱- سه شکل زیر را روی ملوا رسم کنید. آنها را مربع و از محل قطر نصف کنید. حالا با این ۶ تکه انواع چهارضلعی‌ها را بسازید.  ۲- لوزی متقابل را روی ملوا رسم کنید. دور آن را ببرید. از محل تقاطع آن را به ۴ قسمت مساوی تقسیم کنید. با این چهار تکه انواع چهارضلعی‌ها را بسازید. ۳- در کدام یک از شکل‌های متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع، با رسم یک قطر دو مثلث ایجاد شده یا هم‌برابرند؟ ۴- با دو مثلث قائم‌الزاویه ای مساوی، کدام یک از چهارضلعی‌ها را می‌توان ساخت؟ با رسم شکل نشان دهید. (فصل ۶، تمرین، ص. ۱۲۹)	سطح ۲
ارائه تعاریف برای مربع، مستطیل و لوزی بر مبنای چهارضلعی‌های دیگر	۱- دوزنقه چهارضلعی‌ای است که مربع نوعی مستطیل است که مربع نوعی لوزی است که مستطیل نوعی متوازی‌الاضلاع است که لوزی نوعی متوازی‌الاضلاع است که (فصل ۶، ص. ۱۳۸)	سطح ۳
دست‌سازه مجموعه متوازی‌الاضلاع‌ها	مهرمان با وسایل بازی خود یک متوازی‌الاضلاع درست کرده است. ۴- گونه‌ای این متوازی‌الاضلاع با پیچ و مهره به هم وصل شده‌اند. وقتی مهرمان به ضلع کاری فشار وارد می‌کند، شکل او به مستطیل تبدیل می‌شود. حالا مهرمان می‌خواهد لوزی درست کند. او باید چه قطعه‌هایی را با پیچ و مهره به هم وصل کند تا شکل لوزی درست شود؟ در چه صورت مهرمان می‌تواند لوزی را به مربع تبدیل کند؟ شما هم سعی کنید با وسایلی که در خانه دارید، شکل‌های هندسی درست کنید. چگونگی می‌توانید متوازی‌الاضلاع را درست کنید که قابل تبدیل به مستطیل، لوزی و مربع باشند؟ در این مورد در کلاس با هم گفت‌وگو کنید و راه‌حل‌های مختلف را بررسی کنید. (فصل ۶، ص. ۱۴۰)	سطح ۳

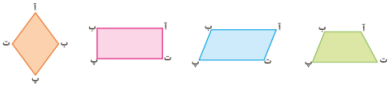
لازم به ذکر است که در کتاب ریاضی پایه چهارم قسمت تمرین مرور فصل ۴ (اندازه‌گیری) برای اولین بار و قبل از معرفی چهارضلعی‌های خاص در کتاب‌های درسی عبارت (رسمی) «رأس» برای چهارضلعی‌ها استفاده می‌شود. بر اساس جدول ۵، محتوای مرتبط با چهارضلعی‌ها در فصل ۶ (شکل‌های هندسی) با بررسی ضلع‌های موازی و غیرموازی اشکال شروع می‌شود. دانش‌آموزان باید تشخیص دهند که در کدام شکل‌ها (چهارضلعی‌ها)، ضلع‌های موازی وجود دارد و در کدام شکل‌ها، ضلع‌های موازی وجود ندارد و کدام یک، چهار ضلع دو به دو موازی دارند و بدین ترتیب شناسایی الگوهای بصری دوزنقه و متوازی‌الاضلاع فراهم می‌شود. «دوزنقه» به عنوان «چهارضلعی که فقط دو ضلع موازی دارد» و «متوازی‌الاضلاع» به عنوان «چهارضلعی که ضلع‌های دو به دو موازی دارد» به همراه نمونه‌هایی از آنها در جهت‌ها و ابعاد مختلف معرفی می‌شوند. بنابراین دوزنقه به شیوه افزایش معرفی شده است. سپس، یک بار با استفاده از دو خط موازی داده شده و یک بار هم در صفحه شطرنجی، دوزنقه و متوازی‌الاضلاع را رسم می‌کنند. در ادامه، به کمک اصل توازی در خطوط موازی و مورب ویژگی برابر بودن زوایای روبه‌رو در متوازی‌الاضلاع مطرح می‌شود. بعد از آن، دانش‌آموزان از طریق اندازه‌گیری اضلاع و زوایای متوازی‌الاضلاع‌های مفروض ویژگی‌های «برابری ضلع‌ها و زوایای روبه‌رو» در آنها را بررسی و کشف می‌نمایند. به علاوه، بررسی می‌شود که آیا ویژگی‌های مذکور در مورد شکل‌های مربع، مستطیل و لوزی صدق می‌کنند. در

واقع مطرح می‌شود که مستطیل، لوزی و مربع به عنوان چهارضلعی‌هایی که ضلع‌های روبه‌رو در آنها با هم موازی است، چه ویژگی‌های دیگری افزون بر ویژگی‌های عموم متوازی‌الاضلاع‌ها دارند. بنابراین زمینه طرح و پرداختن به مفاهیم و روابط سلسله‌مراتبی میان چهارضلعی‌ها به طور صریح ایجاد می‌شود. با توجه به همین زمینه ایجاد شده، مستطیل، لوزی و مربع از طریق روابط سلسله‌مراتبی بین متوازی‌الاضلاع و این چهارضلعی‌ها معرفی می‌گردند. در نتیجه، معرفی این شکل‌ها نه به طور مستقل و بر پایه مفهوم کلی چهارضلعی، بلکه مبتنی بر متوازی‌الاضلاع انجام می‌گیرد. هم‌چنین، این اولین مورد به کار بردن عبارت «لوزی» در کتاب درسی و بر اساس طبقه‌بندی سلسله‌مراتبی ایجاد شده در میان چهارضلعی‌ها است. آنچه ممکن است یک ناهماهنگی ساختاری به نظر برسد، روندی معمول در برجسته کردن تمایز میان دوزنقه (با فقط دو ضلع موازی) با متوازی‌الاضلاع و رده‌های خاص آن است.

در ادامه کتاب پایه چهارم و در قالب دست‌ورزی، دانش‌آموزان به رسم چهارضلعی‌ها و اقطار آنها روی مقوا می‌پردازند، چهارضلعی‌ها را به چند تکه تقسیم می‌کنند و به کمک تکه‌های ایجاد شده، شکل جدید می‌سازند. در انجام این دست‌ورزی، مفهوم همنهشتی مثلث‌های ایجاد شده نیز می‌تواند مورد نظر باشد، و مستلزم شناخت هم‌زمان ویژگی‌های مثلث‌ها و چهارضلعی‌ها است. در ادامه فعالیت‌های مذکور، دانش‌آموزان باید یک متوازی‌الاضلاع، مستطیل، لوزی و مربع را در صفحه شطرنجی رسم کنند که استفاده از صفحه شطرنجی و درخواست توضیح چگونگی بکارگیری آن، از دانش‌آموزان به منظور کمک به ایجاد شرایط اضلاع و زوایای برابر است. در مرور فصل، کتاب از دانش‌آموزان خواسته است تا چهارضلعی‌ها را معرفی کنند. نکته قابل توجه این که در قسمت مربوط به متوازی‌الاضلاع که در کتاب تکمیل شده، ارائه تعریف این چهارضلعی با رعایت معیار حداقلی و صرفاً با ذکر شرط «توازی اضلاع مقابل» است. در انتها، دست‌سازه‌ای ارائه شده که دو جفت میله با طول مساوی را در انتهای یکدیگر با پیچ و مهره به هم لولا کرده است. تا درک روابط سلسله‌مراتبی میان چهارضلعی‌ها را به شیوه‌ای عینی تسهیل نماید. یعنی این که چگونه یک چهارضلعی با حفظ ویژگی‌های مذکور در تعریف آن می‌تواند ویژگی‌های اضافه‌تری نیز پیدا کند و هم‌زمان در یک طبقه خاص‌تر نیز قرار گیرد. کتاب ریاضی پایه پنجم (در فصل‌های ۴ و ۶) به بررسی ویژگی‌های خطوط تقارن و مجموع زوایای داخلی چهارضلعی‌ها متناسب با سطوح ۲ و ۳ ون هیلی می‌پردازد (جدول ۶).

جدول ۶: روند ارائه محتوای مرتبط با چهارضلعی‌ها در کتاب ریاضی پایه پنجم

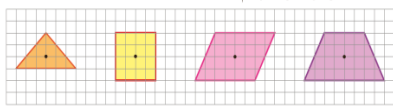
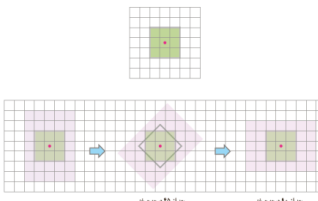
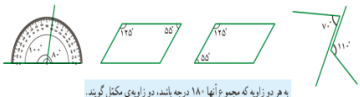
مضمون محتوا	نمونه محتوا	سطح ون هیلی																														
یادآوری ویژگی‌های چهارضلعی‌ها	ادعای مبتنی بر مورد چهارضلعی‌های زیر اطلاعاتی به دست آورده‌اند. شما جدول آنها را تکمیل کنید. <table border="1"> <thead> <tr> <th>چهارضلعی</th><th>تعداد زوایای راست</th><th>ضلع‌های روبه‌رو با هم برابرند</th><th>زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند</th><th>همه ضلع‌ها برابرند</th><th>تعداد خط‌های تقارن</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>مربع</td><td>۴</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td>۲</td></tr> <tr> <td>مستطیل</td><td>۴</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td>۲</td></tr> <tr> <td>لوزی</td><td>۴</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td>۲</td></tr> <tr> <td>متوازی‌الاضلاع</td><td>۴</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td>۲</td></tr> </tbody> </table> (فصل ۴، فعالیت ۱، ص. ۷۹)	چهارضلعی	تعداد زوایای راست	ضلع‌های روبه‌رو با هم برابرند	زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند	همه ضلع‌ها برابرند	تعداد خط‌های تقارن	مربع	۴	✓	✓	✓	۲	مستطیل	۴	✓	✓	✓	۲	لوزی	۴	✓	✓	✓	۲	متوازی‌الاضلاع	۴	✓	✓	✓	۲	سطح ۲
چهارضلعی	تعداد زوایای راست	ضلع‌های روبه‌رو با هم برابرند	زاویه‌های روبه‌رو با هم برابرند	همه ضلع‌ها برابرند	تعداد خط‌های تقارن																											
مربع	۴	✓	✓	✓	۲																											
مستطیل	۴	✓	✓	✓	۲																											
لوزی	۴	✓	✓	✓	۲																											
متوازی‌الاضلاع	۴	✓	✓	✓	۲																											
معرفی مجموع زوایای داخلی چهارضلعی	به این ترتیب، مجموع زوایای یک چهارضلعی چقدر می‌شود؟ روش فریب را تکمیل کنید و توضیح دهید. مجموع زوایای یک مثلث: 180° مجموع زوایای یک چهارضلعی: 360° مجموع زوایای هر چهارضلعی: 360° است.	سطح ۳																														

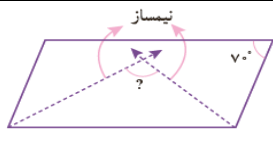
مضمون محتوا	نمونه محتوا	سطح ون هیلی
	(فصل ۴، فعالیت ۲، ص. ۸۰)	
بررسی ویژگی منصف بودن قطرهای در متوازی الاضلاع	الف) القی در متوازی الاضلاعهای زیر، قطرهای رسم شده و یکدیگر را قطع کردهاند. مانند نمونه، در هر شکل اندازه‌های هر قسمت را بنویسید.  (فصل ۴، فعالیت ۱، ص. ۸۰)	سطح ۲
بررسی ویژگی منصف بودن قطرهای در زیر طبقات متوازی الاضلاع	۲- در شکل‌های زیر قطرهای را رسم کنید.  الف) اندازه‌ی قطرهای را روی آنها بنویسید. ب) آیا نتیجه‌ای که در مورد قطرهای متوازی الاضلاع گرفتید، در مورد این شکل‌ها هم درست است؟ ۳- یک چهارضلعی رسم کنید که قطرهای آن، یکدیگر را نصف نکنند. (فصل ۴، فعالیت ۲ و ۳، ص. ۸۱)	سطح ۲
بررسی ویژگی نیمساز بودن قطرهای مربع و لوزی	۴- مانند شکل، یک مربع و یک لوزی را از روی قطر آنها تا کنید. توضیح دهید که چگونه می‌توانید نتیجه بگیریم که قطرهای نیمساز هستند.  (فصل ۴، فعالیت ۴، ص. ۸۲)	سطح ۲
رسم متوازی الاضلاع و لوزی با استفاده از ویژگی منصف بودن قطرهای	۲- قطرهای یک متوازی الاضلاع ۴ و ۶ سانتی‌متر و روی خطهای رویه‌رغاز می‌گیرید. متوازی الاضلاع را رسم کنید. ۳- با توجه به خطهای رویه‌رغاز، یک لوزی به قطر ۴ و ۶ سانتی‌متر رسم کنید. ۸۲ (فصل ۴، کار در کلاس ۲ و ۳، ص. ۸۲)	سطح ۲
بررسی امکان انطباق نیمساز روی خط تقارن	۳- در کدام شکل، نیمساز روی خط تقارن شکل قرار دارد؟ پاسخ خود را توضیح دهید.  (فصل ۴، تمرین ۳، ص. ۸۳)	سطح ۲
بررسی امکان وجود ویژگی‌های لوزی و دوزنقه	۳- هر جمله را با یکی از کلمه‌های همیشه، هیچ‌وقت یا گاهی کامل کنید. الف) قطرهای لوزی با هم برابرند. ب) دو تا از ضلع‌های دوزنقه با هم موازی‌اند. ب) قطرهای لوزی بر هم عمودند. ت) دو تا از ضلع‌های دوزنقه با هم مساوی‌اند. ث) می‌توانیم یک دوزنقه با سه زاویه‌ی راست (قائمه) رسم کنیم. ج) دوزنقه دو زاویه‌ی راست (قائمه) دارد. (فصل ۶، تمرین ۳، ص. ۱۲۳)	سطح ۳

همانطور که جدول ۶ نشان می‌دهد، مبحث چهارضلعی‌ها در فصل ۴ (تقارن و چندضلعی‌ها) با یادآوری ویژگی‌هایی اعم از تعداد زاویه‌های راست، موازی بودن اضلاع، برابری اضلاع و زوایا، و بررسی تعداد خطوط تقارن شروع می‌شود. در ادامه، مجموع زاویه‌های داخلی هر چهارضلعی به دو روش «تجربی» و «با استدلال ریاضی» معرفی می‌گردد. در روش اول، رئوس چهارضلعی کنار هم قرار

می‌گیرند تا زاویه تمام صفحه تشکیل شود و در روش دوم، با رسم یک قطر، چهارضلعی به دو مثلث افراز می‌شود تا مجموع زوایای دو مثلث ایجاد شده با هم جمع شوند. سپس، دانش‌آموزان در متوازی‌الاضلاع‌های رسم شده قسمت‌های روی قطرها را اندازه‌گیری و ویژگی «در هر متوازی‌الاضلاع قطرها منصف یکدیگرند» را کشف می‌نمایند. در ادامه نیز، به کمک تا کردن از روی قطرها، ویژگی انطباق اقطار بر نیمساز زوایای رئوس در مربع و لوزی مطرح می‌شود. سپس، دانش‌آموزان باید با توجه به ویژگی منصف بودن قطرها، متوازی‌الاضلاع و لوزی را با داشتن اندازه قطرهای آنها روی خطوط متقاطع داده شده رسم کنند. در تمرین صفحه بعد از آن، بررسی می‌شود که آیا نیمساز زوایا در چند نوع چهارضلعی (دوزنقه متساوی‌الساقین، متوازی‌الاضلاع، مستطیل و لوزی غیر خاص) روی خطوط تقارن قرار دارند. در انتها، یکی از تمرین‌های قسمت مرور فصل، از دانش‌آموزان می‌خواهد تا دوزنقه‌ای که خط تقارن داشته باشد رسم کنند. این مورد می‌تواند با هدف تأمل دانش‌آموزان بر آن باشد که همه دوزنقه‌ها خط تقارن ندارند تا تصورات آنها از دوزنقه به نمونه‌های متساوی‌الساقین آن محدود نشود. در قسمت مرور فصل ۶ (اندازه‌گیری) این کتاب نیز دانش‌آموزان با انتخاب و قرار دادن عبارات «همیشه»، «هیچ‌وقت» یا «گاهی» در جای خالی، در مورد چگونگی برقرار بودن برخی از ویژگی‌ها برای لوزی‌ها و دوزنقه‌ها تأمل می‌نمایند. کتاب ریاضی پایه ششم (در فصل‌های ۴ و ۵) متناسب با سطح ۲ ون هیلی ویژگی‌های تقارن چهارضلعی‌ها را ارائه می‌نماید (جدول ۷).

جدول ۷: روند ارائه محتوای مرتبط با چهارضلعی‌ها در کتاب ریاضی پایه ششم

مضمون محتوا	نمونه محتوا	سطح ون هیلی															
آشنایی با تقارن مرکزی در چهارضلعی‌ها	۲- فعالیت قبل را برای شکل‌های زیر انجام دهید.  (فصل ۴، فعالیت ۲، ص. ۶۴)	سطح ۲															
بررسی مفاهیم مرتبط با تقارن چهارضلعی‌های متقارن	۳- جدول زیر را کامل کنید. <table border="1" data-bbox="631 1173 980 1310"><thead><tr><th>شکل</th><th></th><th></th><th></th><th></th></tr></thead><tbody><tr><td>مرکز تقارن</td><td></td><td>دارد</td><td></td><td></td></tr><tr><td>محور تقارن (خط تقارن)</td><td>۳</td><td>۴</td><td>۱</td><td>۲</td></tr></tbody></table> (فصل ۴، تمرین ۲، ص. ۶۹)	شکل					مرکز تقارن		دارد			محور تقارن (خط تقارن)	۳	۴	۱	۲	سطح ۲
شکل																	
مرکز تقارن		دارد															
محور تقارن (خط تقارن)	۳	۴	۱	۲													
بررسی تقارن چرخشی مربع	یک دایره کاغذ شفاف را روی مربع قرار دهید. تصویر مربع را روی آن رسم کنید. با استفاده از نوک مداد، کاغذ شفاف را حول مرکز دوران ۹۰ درجه، در جهت عقربه‌های ساعت بچرخانید. آیا تصویر روی شکل منطبق می‌شود؟ توضیح دهید.  (فصل ۴، فعالیت، ص. ۷۰)	سطح ۲															
معرفی زوایای مکمل در متوازی‌الاضلاع	 به هر دو زاویه که مجموع آنها ۱۸۰ درجه باشد، دو زاویه مکمل گویند. (فصل ۵، فعالیت ۲، ص. ۱۰۳)	سطح ۲															

مضمون محتوا	نمونه محتوا	سطح ون هیلی
حل تمرین مرتبط با ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع	 (فصل ۵، تمرین ۳، ص. ۱۰۵)	سطح ۳

طبق جدول ۷، در فصل ۴ (تقارن و مختصات)، دانش‌آموزان به کمک دست‌ورزی با کاغذ شفاف، هر یک از شکل‌ها را حول نقطه داده شده، ۱۸۰ درجه دوران می‌دهند و نتیجه می‌گیرند مربع و متوازی‌الاضلاع روی خودشان منطبق می‌شوند اما دوزنقه این‌گونه نیست، به این ترتیب مفهوم تقارن مرکزی در چهارضلعی‌ها مطرح و مرکز تقارن در اشکال دارای ویژگی تقارن مرکزی، شامل متوازی‌الاضلاع و مربع معرفی می‌شود. سپس، جمع‌بندی ویژگی‌های مرکز تقارن و خط تقارن چند شکل هندسی داده شده، ارائه می‌گردد. هم‌چنین بررسی می‌شود که آیا محل برخورد قطرهای آن‌ها مرکز تقارن است. در ادامه، مربع به عنوان چهارضلعی که حول مرکز با زاویه ۹۰ درجه دارای تقارن چرخشی است، ارائه می‌گردد. در فصل ۵ (اندازه‌گیری) با معرفی زوایای مکمل به ارائه ویژگی مکمل بودن مجموع زوایای مجاور در متوازی‌الاضلاع پرداخته شده و در یکی از تمرین‌ها از دانش‌آموزان خواسته شده است که با توجه به ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع و مفهوم نیمساز و در نظر داشتن مجموع زوایای داخلی مثلث به محاسبه زاویه مجهول بپردازند که حل آن مستلزم چند مرحله نتیجه‌گیری است.

در جدول ۸، اولین معرفی، نحوه معرفی، ویژگی مورد بررسی، شیوه رسم، ابزار استدلال تجربی، فعالیت دست‌ورزی و سطح ون هیلی مرتبط با چهارضلعی‌ها در کتاب‌های ریاضی دوره ابتدایی ارائه شده است.

جدول ۸: جمع‌بندی محتوای مرتبط با چهارضلعی‌ها در کتاب‌های ریاضی دوره ابتدایی

پایه	اولین معرفی چهارضلعی	نحوه معرفی چهارضلعی	ویژگی مورد بررسی	شیوه رسم خواسته شده	ابزار استدلال تجربی	فعالیت دست‌ورزی	سطح ون هیلی
۱	مربع و مستطیل	شناسایی شهودی	گوشه و لبه (راس و ضلع)	تکمیل الگوهای متقارن	شابلون	بررسی گوشه و لبه شکل‌های هندسی	۱
۲	-	- توصیف ویژگی‌های ظاهری -فعالیت اکتشافی	برابری اضلاع مقابل مستطیل	صفحات نقطه‌ای	شابلون و خط‌کش	- ساخت مربع به کمک قطعات تانگرام - الگوهای کاشی کاری	۱ و ۲
۳	-	معرفی در کادر	- زاویه قائمه در مستطیل - توازی و برابری اضلاع روبه‌رو مستطیل - قطر در مستطیل و سایر چهارضلعی‌ها	چندضلعی‌ها	خط‌کش	- ساخت چندضلعی‌ها با چوب کبریت - شناسایی نام شکل‌های هندسی در قطعات تانگرام	۲

پایه	اولین معرفی چهارضلعی	نحوه معرفی چهارضلعی	ویژگی مورد بررسی	شیوه رسم خواسته شده	ابزار استدلال تجربی	فعالیت دست‌ورزی	سطح ون‌هیلی
۴	دوزنقه، متوازی‌الاضلاع و لوزی	- متوازی‌الاضلاع: مبتنی بر عبارت حداقلی توازی دوبه‌دوی اضلاع - دوزنقه: مبتنی بر عبارت افزایی چهارضلعی دارای فقط دو ضلع موازی - مستطیل، مربع و لوزی: سلسله‌مراتبی	- برابری اضلاع و زوایای روبه‌رو متوازی‌الاضلاع - تخصیص ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع به مستطیل، مربع و لوزی - طبقه‌بندی سلسله‌مراتبی متوازی‌الاضلاع‌ها	- رسم به کمک دو خط موازی - رسم در صفحه شطرنجی	گونیا	- بررسی مثلث‌های ایجاد شده به وسیله قطرها در چهارضلعی‌ها - ساخت چهارضلعی‌ها به کمک قطعات تانگرام - ساخت دست‌سازه مجموعه متوازی‌الاضلاع‌ها	۲ و ۳
۵	- فعالیت اکتشافی - استنتاج غیررسمی	- مجموعه زوایای داخلی چهارضلعی - منصف بودن قطرها - امکان انطباق نیمساز بر قطر و خط تقارن	- رسم در صفحه شطرنجی - رسم به کمک قطرها	خط‌کش	بررسی امکان انطباق نیمساز بر قطر و خط تقارن به کمک تا کردن اشکال	۲ و ۳	
۶	- فعالیت اکتشافی	- مرکز تقارن و محور تقارن چهارضلعی‌ها - تقارن چرخشی مربع - زوایای مکمل در متوازی‌الاضلاع	-	کاغذ شفاف	بررسی مرکز تقارن و تقارن چرخشی چهارضلعی‌ها با کاغذ شفاف	۲ و ۳	

همانطور که جدول ۸ نشان می‌دهد، اولین معرفی مربع و مستطیل در پایه اول و اولین معرفی دوزنقه، متوازی‌الاضلاع و لوزی در پایه چهارم صورت می‌گیرد. هم‌چنین، در نحوه ارائه چهارضلعی‌ها به طور رسمی از واژه «تعریف» برای هر کدام از چهارضلعی‌ها استفاده نشده است اما می‌توان گفت که معرفی‌ها در کتاب پایه چهارم، قرابت بیشتری با تعاریف رسمی دارد. در واقع، متوازی‌الاضلاع با شرایط حداقلی، دوزنقه به صورت افزایی و مربع، مستطیل و لوزی به صورت سلسله‌مراتبی مبتنی بر متوازی‌الاضلاع به عنوان مجموعه مرجع تعریف و ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع به کمک روابط سلسله‌مراتبی به ویژگی‌های مربع، مستطیل و لوزی تخصیص داده می‌شوند.

بحث و نتیجه‌گیری

پژوهش حاضر با هدف بررسی روند ارائه محتوای مرتبط با چهارضلعی‌ها و سطوح و نهیلی متناسب با آن در کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی، انجام شد. در مجموع می‌توان گفت در کتاب‌های ریاضی دوره ابتدایی بعد از معرفی هر یک از انواع چهارضلعی‌ها به منظور تثبیت مفاهیم و تقویت مهارت‌های بصری، فرصت‌هایی برای رسم با استفاده از شابلون و بررسی تفاوت‌ها و شباهت‌های ظاهری آن‌ها، رسم به کمک اتصال نقاط به یکدیگر در صفحات نقطه‌ای و همچنین در صفحات شطرنجی در نظر گرفته شده است و به منظور درک عمیق‌تر از این اشکال هندسی و ایجاد ارتباط بین آن‌ها و دنیای واقعی، فعالیت‌های دست‌ورزی از جمله ساخت اشکال هندسی متنوع با استفاده از قطعات تانگرام، شناسایی این اشکال در الگوهای کاشی‌کاری و الگوهای متقارن ارائه شده است که متناسب با سطح ۱ و نهیلی است. از طرفی، رسم چهارضلعی‌ها با ویژگی‌های مشخص مانند رسم دوزنقه و متوازی‌الضلاع به کمک دو خط موازی یا رسم متوازی‌الضلاع و لوزی با استفاده از خواص قطرها و ساخت انواع چهارضلعی‌ها با استفاده از مثلث‌ها و دست‌ورزی با قطعات تانگرام به منظور ساخت نوع خاصی از چهارضلعی متناسب با سطح ۲ و نهیلی هستند. در واقع، ارائه چنین فعالیت‌هایی یکی از نقاط قوت این کتاب‌ها است که اگر در فرآیند یادگیری ادغام شود می‌تواند دستاوردهای شناختی دانش‌آموزان را افزایش دهد (آکار و ایسیکسال، ۲۰۲۲). برای مثال، استفاده از تانگرام در فرآیند یادگیری، تفکر هندسی دانش‌آموزان در سطوح ۱ و ۲ و نهیلی را به طور قابل توجهی ارتقا می‌دهد (سیو و همکاران^{۴۶}، ۲۰۱۳). با توجه به دسترسی دانش‌آموزان به تانگرام در آخر کتاب‌های درسی پایه‌های دوم و سوم، همچنین کار با قیچی در پایه اول، این موضوع در بافت آموزشی و فرهنگی ایران نیز قابل تعمیم است.

یافته‌ها حاکی از آن است که کتاب‌های ریاضی دوره ابتدایی نمایش‌های بصری محدودی از چهارضلعی‌ها دارند و عمدتاً به ارائه تصاویر نمونه‌های اولیه چهارضلعی‌ها اکتفا شده است. این امر می‌تواند سبب شود که دانش‌آموزان چهارضلعی‌ها را فقط در وضعیت‌های خاص تشخیص دهند. مثلاً بخشعلی‌زاده و بروجردیان (۱۳۹۶) بیان می‌دارند که اکثر دانش‌آموزان صرفاً مستطیلی که قاعده افقی دارد را مستطیل می‌دانند. در صورتی که اسپرنگر^{۴۷} (۲۰۲۶) ابراز می‌نماید که برای تقویت درک عمیق‌تر و انعطاف‌پذیرتر مفاهیم هندسی ضروری است که فرصت‌های یادگیری صرفاً بر اشکال نمونه اولیه متمرکز نباشد. در خصوص نحوه معرفی مفاهیم چهارضلعی‌ها در کتاب‌های ریاضی دوره ابتدایی، می‌توان گفت که عمدتاً ماهیت یک تعریف ریاضی را ندارند و در فعالیت‌های اکتشافی و از طریق نمونه‌ها و شناسایی الگوهای بصری ارائه می‌شوند. اگر چه روش‌های یادگیری از طریق کشف مفهوم، یک تمرین یادگیری است که دانش‌آموزان را به طور فعال درگیر می‌کند و تأثیر مثبتی بر یادگیری مفاهیم ریاضی و مهارت‌های حل مسئله دارد (عبداله و شین، ۲۰۱۹). با این حال، در کتاب‌های درسی دوره ابتدایی چه تعاریف چهارضلعی‌ها و چه ویژگی‌های اساسی مربوط به آن‌ها پس از فعالیت‌های اکتشافی برجسته نشده است و یافته‌های پژوهش غلام‌آزاد (۱۴۰۱) نیز مؤید این موضوع است که برخلاف انتظار طراحان محتوای کتاب‌های درسی ریاضی دوره اول ابتدایی، اغلب فعالیت‌ها به گونه‌ای نیستند که عموم دانش‌آموزان بتوانند به تنهایی درگیر انجام آنها شوند و از برخورد افراطی و اگذاری کشف یادگیری همه مفاهیم ریاضی به دانش‌آموز پرهیز شود.

معرفی مستطیل، لوزی و مربع مبتنی بر روابط سلسله‌مراتبی آنها با معرفی متوازی‌الضلاع انجام شده است و تعریف مستقل از این روابط ندارند. پژوهش فوجیتا (۲۰۱۲) نیز نشان داد که رویکرد طبقه‌بندی سلسله‌مراتبی میان چهارضلعی‌ها بستری مناسب جهت رشد و توسعه تفکر هندسی را فراهم می‌نماید. در عین حال، استفاده از نمودار برای نمایش ارتباط میان چهارضلعی‌ها که در کتاب پایه چهارم آمده است، می‌تواند به دلیل موثر بودن این نمودارها در درک روابط سلسله‌مراتبی باشد (پاجیلینگ و نورینی، ۲۰۲۲). از

⁴⁶ Siew & et al

⁴⁷ Springer

طرفی، یافته‌های پژوهش آلتیپارماک و گورکان (۲۰۲۱) نشان داد، اکثر دانش‌آموزان پایه چهارم در سطح تجسم یعنی سطح ۱ ون هیلی و تعاریف ارائه شده توسط آنها، عمدتاً به صورت افزایی هستند. یافته‌های پژوهش آکار و ایسیکسال (۲۰۲۲) نیز نشان داد دانش کسب شده توسط دانش‌آموزان پایه پنجم، صرفاً به ویژگی‌های اساسی چهارضلعی‌ها محدود می‌شود. افزون بر آن، پژوهش نگابا و نداکولاراک (۲۰۲۵) نشان داد حتی یک سوم از دانش‌آموزان پایه هشتم در سطح تجسم ون هیلی و تنها تعداد کمی از دانش‌آموزان در سطح تجزیه و تحلیل قرار دارند و تقریباً هیچ کدام هنوز قادر به تشخیص و طبقه‌بندی انواع چهارضلعی نیستند. هم‌چنین، پژوهش عالمیان و همکاران (۱۳۹۷) نیز مؤید آن است که اکثر دانش‌آموزان حتی تا پایه هشتم نیز روابط سلسله‌مراتبی را درک نمی‌کنند و شناخت آنها عمدتاً محدود به ویژگی‌های اضلاع و زوایای چهارضلعی‌ها می‌شود. بنابراین، اگرچه روابط سلسله‌مراتبی چهارضلعی‌ها در کتاب ریاضی پایه چهارم مورد تأکید بوده است، اما نمی‌توان به ایجاد چنین درکی در دانش‌آموزان این پایه اطمینان داشت.

در بعضی از فصول کتاب‌های دوره ابتدایی بعد از کشف یا معرفی ویژگی‌های مربوط به هر چهارضلعی، خلاصه این موارد با ارائه تصویر نمونه‌ای از آنها در یک جدول ارائه می‌شود تا دانش‌آموزان امکان بیشتری برای مرور و دسته‌بندی این ویژگی‌ها داشته باشند. عبدالله و شین (۲۰۱۹) نیز ابراز می‌کنند که فهرست کردن ویژگی‌های چهارضلعی‌ها در جدول البته نه در بدو امر، بلکه پس از بحث و بررسی آنها در کتاب، می‌تواند منجر به یادگیری معنادار و اجتناب از حفظ طوطی‌وار شود. در یک نگاه کلی، شیوه ارائه مباحث هندسی مربوط به چهارضلعی‌ها، نه به صورت یکجا، بلکه بین فصل‌های مختلف آن توزیع شده است. در پایه‌های دوم و سوم و ششم این مباحث در فصل‌هایی با عناوین غیرمرتبط با موضوعات هندسی نیز ارائه شده است. به عنوان مثال، می‌توان به ارائه محتوای مرتبط با زوایا و اضلاع مستطیل در پایه سوم در فصل‌های مرتبط با عددهای کسری و ضرب و تقسیم اشاره داشت. این پراکندگی هر چند که ممکن است باعث ارتباط دادن مفاهیم با یکدیگر شوند اما شیوه ارائه پراکنده مطالب پیرامون یک موضوع، ممکن است منجر به عدم انسجام محتوا در ذهن دانش‌آموزان گردد که یافته‌های پژوهش غلام‌آزاد (۱۴۰۱) مبنی بر ایجاد همخوانی بین محتوای آموزش هندسه و اختصاص واحدهای یادگیری مشخص به آموزش مفاهیم هندسه در کتاب‌های ریاضی دوره اول ابتدایی نیز مؤید همین موضوع است. سرانجام می‌توان گفت که روند ارائه محتوای مرتبط با چهارضلعی‌ها در کتاب‌های ریاضی دوره ابتدایی، با افزایش پایه‌های تحصیلی و فراهم نمودن زمینه کافی به سمت سطوح بالاتر ون هیلی میل می‌کند و به ترتیب شامل سطوح ۱ تا ۳ ون هیلی با تمرکز بر سطح ۲ می‌گردد که البته محتوای پایه چهارم حتی در مقایسه با پایه‌های پنجم و ششم بیشترین تأکید را بر سطح ۳ ون هیلی دارد.

به طور کلی بر اساس یافته‌های پژوهش، به مولفان کتب درسی ریاضی پیشنهاد می‌شود به منظور غلبه بر محدودیت‌های درک فراگیران و رفع استدلال‌های ناصحیح یا ناقص متأثر از پدیده نمونه‌های اولیه به ارائه الگوهای بصری متنوع شامل نمونه‌های غیراولیه در معرفی هر یک از اشکال هندسی چهارضلعی‌ها بپردازند و بیان نتیجه فعالیت‌های اکتشافی را به جای واگذار نمودن به معلم یا دانش‌آموز، برای اطمینان از درستی آن، در قالب یک جمع‌بندی تصریح نمایند. هم‌چنین، اگر فرصت مرور و تثبیت روابط سلسله‌مراتبی در کتاب‌های پایه‌های پنجم و ششم ایجاد شود، می‌توان انتظار بهبود درک این مفاهیم را داشت. به عنوان محدودیت عمده در انجام این پژوهش، می‌توان به عدم وجود پیشینه کاملاً مرتبط با موضوع اشاره نمود. با توجه به گستردگی و اهمیت موضوع، برخی پیشنهادها برای مطالعات بعدی می‌تواند مواردی از قبیل بررسی روند ارائه محتوا و سطوح تفکر هندسی متناسب با آن در سایر مباحث هندسه کتاب‌های درسی ریاضی دوره ابتدایی، هم‌چنین مقایسه سطوح تفکر هندسی دانش‌آموزان و سطوح مورد انتظار کتاب‌های درسی، تحلیل تمرین‌های مرتبط با چهارضلعی‌ها در این کتاب‌ها از ابعاد گوناگون برای مثال، از لحاظ بازپاسخ یا بسته‌پاسخ بودن و زمینه‌مدار یا بدون زمینه بودن و مطالعه چگونگی تداوم محتوای مرتبط با چهارضلعی‌ها در هندسه دوره متوسطه اول و دوم باشد.

منابع

- عالمیان، وحید، سیدی، محمد و حبیبی، ملوک. (۱۳۹۷). شناسایی بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه هشتم در مهارت‌های هندسی و استفاده از نظریه ون‌هیلی برای بهبود مهارت‌های هندسی آنان. *فصلنامه نوآوری‌های آموزشی*، ۱۷(۳)، ۱۲۳-۱۴۸.
- بخشعلی‌زاده، شهرناز و بروجردیان، ناصر. (۱۳۹۶). شناسایی بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی در حوزه محتوایی هندسه و اندازه‌گیری: مقایسه عملکرد آنان با میانگین عملکرد در سطح بین‌المللی. *فصلنامه نوآوری‌های آموزشی*، ۱۶(۴)، ۱۰۱-۱۲۶.
- غلام‌آزاد، سهیلا. (۱۴۰۱). اجرای برنامه درسی ریاضی دوره اول آموزش ابتدایی: چالش‌ها و راهکارها. *نظریه و عمل در برنامه درسی*، ۱۰(۲۰)، ۳۸۹-۴۲۴.
- ریحانی، ابراهیم. (۱۳۸۴). درآمدی بر نظریه پیازه و نظریه ون‌هیلی. *رشد آموزش ریاضی*، ۲۲(۲)، ۱۲-۲۲.
- یافتیان، نرگس و صفابخش، آزاده. (۱۳۹۸). تحلیل محتوای هندسه پایه هشتم با استفاده از سطوح تفکر هندسی ون‌هیلی. *رشد آموزش ریاضی*، ۳۶(۳)، ۴-۱۱.

References

- Abdullah, A. H., & Shin, B. (2019). A comparative study of quadrilaterals topic content in mathematics textbooks between Malaysia and South Korea. *Journal on Mathematics Education*, 10(3), 315-340.
- Akar, N., & Işıksal-Bostan, M. (2022). The didactic transposition of quadrilaterals: the case of 5th grade in Turkey. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(3), 628-649.
- Alamian, V. , Seyyedi, M. and Habibi, M. (2018). Identifying the misconceptions of eighth grade students on geometry skills and the use of van Hiele theory to improve their geometry skills. *Journal of Educational Innovations*, 17(3), 123-147. [in Persian]
- Altıparmak, K., & Gürcan, G. (2021). Examination of 4th grade students' definitions for square, rectangle and triangle geometric shapes. *Education Quarterly Reviews*, 4(3), 304-321.
- Avcu, R. (2019). A comparison of mathematical features of Turkish and American textbook definitions regarding special quadrilaterals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(4), 577-602.
- Bakhshalizadeh, S. and broojerdian, N. (2017). Identifying the primary school fourth grade students' common misconceptions in content area of geometry and measurement: A comparison of their performance with the mean performance at international level. *Journal of Educational Innovations*, 16(4), 101-126. [in Persian]
- Brunheira, L., & da Ponte, J. P. (2019). From the classification of quadrilaterals to the classification of prisms: An experiment with prospective teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 65-80.
- Burger, W. F., & Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17(1), 31-48.
- Clements, D. H. (2003). Teaching and learning geometry. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 151-178). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Crowley, M. (1987). The van Hiele Model of Development of Geometric Thought. In *Learning and Teaching Geometry K-12*. In Mary M. Lindquist & Albert P. Shulte (Eds.), 1987 Yearbook of the National Council of Teacher of Mathematics, 1-16. Reston, Va. NCTM.
- Cybulski, F. C., Oliveira, H., & Cyrino, M. C. D. C. T. (2024). Quadrilaterals hierarchical classification and properties of the diagonals: A study with pre-service mathematics teachers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(8), em2490.

- De Villiers, M., Govender, R., & Patterson, N. (2009). Defining in geometry. In T. V. Craine, & R. Rubenstein (Eds.), *Understanding geometry for a changing world* (pp. 189-203). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Elbehary, S. G. A., Fahem, S. M., & Peni, N. R. N. (2023). Track prospective mathematics teachers' understanding of special quadrilaterals: An exploration of level 3 of geometric thinking. *Futurity Education*, 3(3), 20-45.
- Ersando, M. JR.P. (2026). Integrating education for sustainable development into elementary mathematics: an action research on curriculum mapping, teacher experiences, and instructional guide validation. *International Journal of Innovative Research in Multidisciplinary Education*, 5(2), 146-153.
- Sprenger, M. (2026). Pre-service teachers' and children's conceptual understanding of quadrilaterals. In T. Meaney et al. (Eds.), *Engaging with Mathematics in the Early Years* (pp. 321-334). Springer.
- Fan, L., Qi, C., Seah, W. T., & Liu, Q. (2025). Research on mathematics textbooks in relation to curriculum development and instructional reform: recent advances and future directions. *ZDM-Mathematics Education*, 57(5), 845-857.
- Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, 45, 633-646.
- Fujita, T., & Jones, K. (2007). Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: Towards a theoretical framing. *Research in Mathematics Education*, 9(1), 3-20.
- Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31(1), 60-72.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents. *Journal for Research in Mathematics Education Monograph Series*, 3, 1-196.
- Gholamzad, S. (2023). Implementation of the mathematics curriculum of the first cycle of elementary education: challenges and solutions. *Journal of Theory & Practice in Curriculum*, 20(10), 395-426. [in Persian]
- Hadar, L. L. (2017). Opportunities to learn: Mathematics textbooks and students' achievements. *Studies in Educational Evaluation*, 55, 153-166.
- Halat, E. (2008). In-service middle and high school mathematics teachers: Geometric reasoning stages and gender. *The Mathematics Educator*, 18(1), 8-14.
- Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In *Mathematics and cognition* (pp. 70-95). Cambridge University Press.
- Janah, M., Rahardi, R., & Rahardjo, S. (2024). Analysis of geometry concept sequence in student textbooks based on van Hiele's theory. *PRISMA*, 13(2), 295-302.
- Kalyankar, V. K. (2019). *The van Hiele Analysis of Curricular Materials: A Comparative Study*. Doctoral dissertation in mathematics, University of Arkansas.
- Macit, B., & Tabak, S. (2026). Identifying misconceptions of 5th grade students regarding triangles and quadrilaterals. *Education Mind*, 5(1), 1-16.
- Mason, M. (2009). The van Hiele levels of geometric understanding. *Colección Digital Eudoxus*, 1(2), 4-8.
- Miller, S. M. (2018). An analysis of the form and content of quadrilateral definitions composed by novice pre-service teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 50, 142-154.

- Morgan, C. (2006) What is a definition for in school mathematics? In M, Bosch, (Ed.), *European Research in Mathematics Education IV: Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 861-871.
- Musser, G. L., Peterson, B. E., & Burger, W. F. (2013). *Mathematics for Elementary Teachers: A Contemporary Approach*. John Wiley & Sons.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.
- Nggaba, M. E., & Ndakularak, I. L. (2025). Level of student's geometry thinking on quadrilateral topic. *EDUMATSAINS (Journal Pendidikan Matematika Dan Sains)*, 9(2), 77-89.
- Pagiling, S. L., & Nur'aini, K. D. (2022). Specialized content knowledge lower secondary school teachers on quadrilaterals. *PYTHAGORAS: Journal Matematika dan Pendidikan Matematika*, 17(1), 333-345.
- Pusey, E. L. (2003). *The van Hiele model of reasoning in geometry: A literature review*. Unpublished master's thesis, North Carolina State University, Raleigh, NC, United States.
- Reyhani, E. (2005). Introduction to Piaget's theory and van Hiele theory. *Journal of Roshd Mathematics Education*, 22(2), 12-22. [in Persian]
- Rezai, S., Fan, L., & Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM*, 53(6), 1189-1206.
- Siew, N. M., Chong, C. L., & Abdullah, M. R. (2013). Facilitating students' geometric thinking through van Hiele's phase-based learning using tangram. *Journal of Social Sciences*, 9(3), 101-111.
- Usiskin, Z., Griffin, J., Witonsky, D., & Willmore, E. (2008). *The classification of quadrilaterals: A study of definition*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2020). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (10th Edition), Pearson Education Limited.
- Yafian, N. and Safabakhsh, A. (2019). Content analysis of grade 8 geometry, using van Hiele levels of geometric thinking. *Journal of Roshd Mathematics Education*, 36(3), 4-11. [in Persian]
- Zeybek, Z. (2017). Learning to understand inclusion relations of quadrilaterals. *The Eurasia Proceedings of Educational and Social Sciences*, 6, 9-13.
- Žilková, K. (2015). Misconceptions in pre-service primary education teachers about quadrilaterals. *Journal of Education, Psychology and Social Sciences*, 3(1), 30-37.