Journal of
Theory & Practice in
Curriculum

I.C.S.A.
Iranian Curriculum Studies Association

ISSN : 2345-4938
eISSN :2345-4938
Vol.24 (13); 2026
P: 87-114
https://www.jcstpicsa.ir

Impact of Dynamic Diagrams on Understanding the Concept of Division by Zero: An Intuitive Approach

Majid Haghverdi* , Zahra Parishani Marzijarani**

* Associate Professor, Department of Mathematics, Ar.C., Islamic Azad University , Arak, Iran (Corresponding Author). Email: Majid.Haghverdi@iau.ac.ir

** MA Student in Department of Mathematics, Ar.C., Islamic Azad Universit , Arak, Iran , Arak, Iran. Email: Zahraparishanimarzijarani@yahoo.com

Article Info

Article type:
Research Article

Key words:
Division by zero, visual representation, dynamic diagram, GeoGebra.

Article history:
Received : 03 Nov 2025
Accepted : 24 Feb 2026

Abstract

The present study aims to investigate the effect of using intuition on improving the understanding of the concept of "division by zero" through dynamic diagrams in the GeoGebra environment. Division by zero is one of the challenging topics in mathematics education, which is often accepted by students merely as a rule, without conceptual understanding. In this regard, inspired by the approach introduced by Droujkova and McLoughlin (2013), an instructional intervention based on dynamic visual representations was designed and implemented. In this quasi-experimental study with a pre-test–post-test design, 70 high school students from Shazand city participated. The data analysis results indicated that the educational intervention significantly improved students' conceptual understanding of division by zero. The findings suggest that the use of visual and dynamic educational tools such as GeoGebra can effectively enhance students' conceptual understanding of abstract mathematical concepts and should be considered in the design of innovative teaching methods.

Cite this Article:

Haghverdi,M. and parishanimarzigarani,Z. (2026). Impact of dynamic diagrams on understanding the concept of division by zero: an intuitive approach. (e241717). Theory and Practice in the Curriculum, 87-114. 13 (26), e241717 doi: 10.22034/cstp.2026.557272.1118

Extended Abstract

Introduction

Crespo and Nicol (2006) argue that many students perceive zero as “nothing” and therefore ignore it when solving mathematical problems. Consequently, they tend to accept the statement “division by zero is undefined” merely as a rule given by the teacher, without conceptual understanding (Kaplan, 2000). To address this issue, mathematics instruction should enable students to visualize and interpret abstract concepts through real-world contexts.

This study focuses on teaching the concept of “undefined division by zero” through three instructional approaches:

1. Formal reasoning – explaining mathematical rules,
2. Concrete reasoning – using real-life examples, and
3. Constructivist learning – fostering conceptual understanding through dynamic visualizations and interactive graphs.

Research questions

How intuitions impact on better understanding the concept of division by zero through dynamic charts.

Methods

This study employed an experimental, one-group pretest–posttest design to examine the impact of dynamic graph-based instruction on students’ conceptual understanding of division by zero. The participants were 62 secondary school students randomly selected from Shazand, Iran. A performance-based questionnaire, adapted from Ball (1998), was used to collect data before and after the intervention. Its content validity was confirmed by three experts, and internal consistency was acceptable (Cronbach’s $\alpha = 0.78$).

The intervention involved two sessions of instruction using dynamic visualizations created in GeoGebra. Students interacted with movable points on the graph to explore relationships among the dividend, divisor, and quotient. Data were analyzed using descriptive and inferential statistics (paired t-test, ANCOVA, and effect size measures), complemented by qualitative content analysis of students’ reasoning patterns.

Results

Quantitative data were analyzed using SPSS (version 26). The percentage of correct responses increased substantially from the pretest (43.5%) to the posttest (85.5%), indicating a notable improvement in students’ conceptual understanding of division by zero. A paired t-test confirmed that this difference was statistically significant, $t(61) = 8.72$, $p < 0.001$, with a large effect size (Cohen’s $d = 1.11$). The Shapiro–Wilk test indicated normality ($p = 0.21$). ANCOVA results also showed a significant effect of the instructional method after controlling for pretest scores, $F(1, 59) = 14.36$, $p < 0.001$, $\eta^2 = 0.20$.

Qualitative findings supported these results, revealing that dynamic visualization reduced conceptual errors and strengthened students’ use of visual and intuitive reasoning.

Discussion

The findings of this study demonstrate that the use of dynamic charts within the GeoGebra environment significantly enhances students’ conceptual understanding of division by zero. The considerable improvement in post-test scores, along with the large effect size (Cohen’s $d = 1.11$), indicates that the visual and interactive features of dynamic representations promote deeper learning compared to traditional instruction

From a constructivist perspective, these results suggest that when learners actively manipulate mathematical representations and observe real-time changes, they construct more meaningful and durable knowledge structures. The visual disappearance of the quotient line as the divisor approaches zero provides a tangible and intuitive experience of "non-existence," bridging the gap between abstract reasoning and concrete understanding.

This outcome aligns with the theories of Piaget and Vygotsky, emphasizing the importance of active learning, interaction, and visualization in developing mathematical reasoning. It also supports Bruner's concept of multiple representations, where learners move from enactive and iconic stages toward symbolic understanding through guided exploration.

Moreover, the qualitative data revealed that students shifted from purely formal and rule-based reasoning toward more intuitive and visual explanations, indicating a transformation in their cognitive approach to mathematical abstraction. This confirms that technology-enhanced visualization can serve as a powerful mediating tool in conceptual mathematics instruction.

Overall, integrating dynamic visual tools such as GeoGebra into mathematics education can bridge the gap between procedural knowledge and conceptual understanding. By enabling students to "see" the meaning behind abstract expressions, teachers can foster both engagement and deep comprehension—especially in complex topics like division by zero.

Keywords
Division by zero, visual representation, dynamic diagram, GeoGebra.

ISSN :2345-4938
eISSN: 2783-0640

نظریه و عمل در برنامه درسی

انجمن مطالعات برنامه درسی ایران

سال دوازدهم، شمارۀ ۲۴ پاییز و زمستان ۱۴۰۳

۸۷-۱۱۴

https://www.jcstpicsa.ir

تأثیر نمودارهای پویا در درک مفهوم تقسیم بر صفر: یک رویکرد شهودی

مجید حق وردی*، زهرا پریشانی مرزیجرانی **

* دانشیار آموزش ریاضی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران (نویسنده مسئول). رایانامه: Majid.Haghverdi@iau.ac.ir

** دانشجوی کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران. رایانامه: Zahraparishanimarzijarani@yahoo.com

اطلاعات مقاله

نوع مقاله:
علمی-پژوهشی

واژگان کلیدی:

تقسیم بر صفر، بازنمایی تصویری، نمودار پویا، جئوجبرا.

تاریخچه مقاله:

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۸/۱۲

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۱۲/۰۵

چکیده

هدف از پژوهش حاضر، بررسی تأثیر به‌کارگیری شهود در بهبود درک مفهوم «تقسیم بر صفر» با استفاده از نمودارهای پویا در محیط نرم‌افزار جئوجبرا است. تقسیم بر صفر از مفاهیم چالش برانگیز در آموزش ریاضی است که معمولاً از سوی دانش‌آموزان بدون درک مفهومی و صرفاً به‌عنوان یک قانون پذیرفته می‌شود. در این راستا، با الهام از رویکرد دوژکووا و مکلوفین(۲۰۱۳) مداخله‌ای آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های پویا طراحی و اجرا شد. در این مطالعه، ۷۰ دانش‌آموز دوره‌ی دوم متوسطه در شهرستان شازند با طرح نیمه‌تجربی پیش‌آزمون ــ پس‌آزمون مورد بررسی قرار گرفتند. نتایج تحلیل داده‌ها نشان داد که مداخله آموزشی موجب بهبود معنادار درک مفهومی دانش‌آموزان از تقسیم بر صفر شد. یافته‌ها نشان می دهد که بهره گیری از ابزارهای تصویری و پویای آموزشی مانند جئوجبرا، می‌تواند به ارتقای درک مفهومی دانش‌آموزان از مفاهیم انتزاعی ریاضی مؤثر باشد و در طراحی روش‌های نوین تدریس مورد توجه قرار گیرد.

استناد به این مقاله:

حق وردی،مجید و پریشانی مرزیجرانی،زهرا . (۱۴۰۴). تأثیر نمودارهای پویا در درک مفهوم تقسیم بر صفر: یک رویکرد شهودی. (e241717). نظریه و عمل در برنامه درسی، ۱۳(۲۶)، ۸۷-۱۱۴. e241717 doi: 10.22034/cstp.2026.557272.1118

ناشر: انجمن مطالعات برنامه درسی ایران

مقدمه

عدد صفر یکی از اعداد جادویی و در عین حال چالش‌برانگیز در ریاضیات است که راز و رمزهای بسیاری را در خود جای داده است و نقشی اساسی در پیشرفت این دانش ایفا کرده است (بلیک و ورهیل، ۱۹۸۵) با وجود اهمیت این مفهوم، تدریس و یادگیری عملیات ریاضی مرتبط با صفر، به‌ویژه تقسیم بر صفر، همواره با دشواری‌هایی همراه بوده است. کرسپو و نیکول (۲۰۰۶) نشان دادند که بسیاری از دانش‌آموزان، صفر را معادل «هیچ» تلقی می‌کنند و به همین دلیل در هنگام مواجهه با آن در حل مسائل، آن را نادیده می‌گیرند. این درک نادرست موجب بروز ابهام در موضوعاتی مانند زوج یا فرد بودن صفر، جایگاه آن در مجموعه اعداد، یا عبارات شامل صفر می‌شود. چنین سوءبرداشت‌هایی ریشه در یادگیری سطحی مفهوم صفر در دوره ابتدایی دارد. در نتیجه، هنگامی که دانش‌آموزان با مفهوم تقسیم بر صفر مواجه می‌شوند، آن را صرفاً به عنوان یک قانون «تعریف‌نشده» می‌پذیرند، بی‌آنکه درکی مفهومی از چرایی آن داشته باشند (کاپلان[1]، ۲۰۰۰). این وضعیت نشان می‌دهد که روش‌های سنتی آموزش که مبتنی بر ارائه قوانین و حفظ آن‌هاست، در ایجاد درک عمیق و مفهومی از تقسیم بر صفر ناکارآمد بوده‌اند .برای رفع این چالش‌ها، ضروری است آموزش مفاهیم ریاضی به‌گونه‌ای طراحی شود که دانش‌آموزان بتوانند ارتباط میان مفاهیم ریاضی و پدیده‌های واقعی پیرامون خود را درک کنند. ایجاد این پیوستگی، حس کشف و در نتیجه انگیزش یادگیری را در فراگیران تقویت می‌کند. پژوهش‌های متعدد نشان داده‌اند که استفاده از بازنمایی‌های بصری، مثال‌های ملموس و ابزارهای آموزشی مانند نرم‌افزارهای پویا می‌تواند در این زمینه مؤثر باشد (کلارک ویلسون و همکاران[2]، ۲۰۲۴).

در سال‌های اخیر، نرم‌افزارهای هندسه پویا مانند جئوجبرا به‌عنوان ابزارهای قدرتمند در آموزش مفاهیم انتزاعی ریاضی مورد توجه قرار گرفته‌اند. این ابزارها با فراهم آوردن امکان تعامل بصری و پویا با مفاهیم ریاضی، به یادگیرندگان کمک می‌کنند تا درک عمیق‌تری از مفاهیم انتزاعی به دست آورند(لیبورد و جن[3] ۲۰۲۱، ژانگ و همکاران[4] ۲۰۲۳، مهری تکمه و همکاران، ۱۴۰۱) با این حال، پژوهش‌های محدودی، به‌ویژه در ایران، به بررسی تأثیر این رویکرد در آموزش مفهوم خاص تقسیم بر صفر پرداخته‌اند. پژوهش حاضر با هدف پاسخ به این شکاف پژوهشی انجام شد. هدف اصلی این مطالعه، بررسی اثربخشی استفاده از نمودارهای پویا در محیط نرم‌افزار جئوجبرا بر بهبود درک مفهومی دانش‌آموزان از مفهوم «تقسیم بر صفر» بود.

برای دستیابی به این هدف، در این پژوهش سه رویکرد آموزشی برای تدریس مفهوم «تعریف ناپذیری تقسیم عدد بر صفر» مورد مطالعه قرار گرفت:

۱. آموزش مبتنی بر استدلال رسمی و قوانین ریاضی،
۲. آموزش مبتنی بر استدلال عینی با مثال‌های واقعی،
۳. آموزش مبتنی بر ساخت دانش از طریق نمودارهای پویا در چارچوب نظریه ساخت‌گرایی.

در نهایت، با الهام از رویکرد دروژکووا و مکلوفین (۲۰۱۳)، یک مداخله آموزشی طراحی و اجرا شد که در آن از نمودارهای پویا و بازنمایی‌های تصویری برای ایجاد درک شهودی از مفهوم تقسیم بر صفر استفاده شد. این رویکرد بر مبنای این فرضیه استوار بود که ارائه بصری و پویای مفهوم تقسیم، به‌ویژه در لحظه‌ای که مقسوم‌علیه به صفر نزدیک می‌شود و خارج‌قسمت «ناپدید» می‌گردد، می‌تواند تجربه‌ای ملموس و قابل فهم از «عدم وجود» خارج‌قسمت برای دانش‌آموزان ایجاد کند. به بیان دیگر، هدف استفاده از این

[1] Kaplan
[2] Clark-Wilson
[3] Liburd and Jen
[4] Zhang

رویکرد، تبدیل یک مفهوم انتزاعی و دشوار به یک تجربه بصری و شهودی بود که بتواند به درک عمیق‌تر و پایدارتر دانش‌آموزان منجر شود.

ادبیات پژوهشی

پژوهشگران حوزه‌ی آموزش ریاضی با رویکردهای گوناگون به بررسی ابعاد مختلف دانش موضوعی معلمان و تأثیر آن بر کیفیت تدریس پرداخته‌اند. برخی نیز دیدگاه‌ها و باورهای معلمان را درباره‌ی ماهیت مفاهیم ریاضی و شیوه‌های آموزش آن‌ها مورد مطالعه قرار داده‌اند (داهال[۱] و همکاران، ۲۰۲۲؛ ارنست[۲]، ۱۹۸۸؛ لرمان[۳]، ۱۹۹۸). از سوی دیگر، مطالعات کرسپو و نیکول (۲۰۰۶)، راسل و چرنوف[۴] (۲۰۱۱) و کاراکوس[۵] (۲۰۱۸) نشان داده اند که تکیه ی صرف بر استدلال‌های رسمی در آموزش ریاضی کافی نیست؛ چراکه چنین رویکردی موجب شکل‌گیری تفکری قالب بندی شده و محدود در دانش‌آموزان می‌شود. در مقابل، به‌کارگیری ابزارهایی مانند نمودارها، بازنمایی‌های تصویری و تجربه‌های شهودی می‌تواند به درک عمیق‌تر مفاهیم ریاضی کمک کند.

تحقیقات متعددی در زمینه‌ی آموزش مفهوم تقسیم بر صفر انجام شده است که نتایج آن‌ها بر ضرورت ترکیب استدلال‌های رسمی، عینی و شهودی در فرآیند یادگیری تأکید دارند. در عین حال، برخی پژوهش‌ها نشان می‌دهند که معلمان در به‌کارگیری استدلال‌های شهودی و تصویری در عمل با چالش مواجه‌اند (ویجرز[۶] و همکاران ،۲۰۲۳؛ بال[۷]، ۱۹۹۰؛ ؛ کانکوی[۸]، ۲۰۱۰؛ کرسپو و نیکول، ۲۰۰۶؛ دانکن[۹]، ۱۹۹۱؛ کیم[۱۰]، ۲۰۰۷؛ کوین، لامبرگ و پرین[۱۱]، ۲۰۰۸؛ ؛ ساندار[۱۲]، ۱۹۹۰؛ تسامیر و شفر[۱۳]، ۲۰۰۰؛ زاهدی،۱۴۰۱).

نتایج پژوهش‌های زاهدی و حق وردی (۱۴۰۱)، بال (۱۹۹۰)؛ جانسن و هوهنسی[۱۴] (۲۰۱۶)؛ لو و لو[۱۵] (۲۰۱۲)و برجسترا[۱۶] (۲۰۲۱) و تیروش[۱۷] (۲۰۰۰) نیز نشان داده‌اند که دانش‌آموزان در درک مفهومی عمل تقسیم، به‌ویژه تقسیم بر صفر، عملکرد ضعیفی دارند. برای مثال لو و لو (۲۰۱۲) دریافتند که دانش‌آموزان دوره ابتدایی هنگام حل مسائل تقسیم کسرها از طریق بازنمایی‌های تصویری و کلامی دچار چالش می‌شوند؛ هرچند ممکن است از نظر محاسباتی پاسخ درست ارائه دهند، اما در توجیه مفهومی آن ناتوان‌اند. مطالعه ی اسمیت و دو[۱۸] (۲۰۲۱) تأکید می‌کند که درک تصویری یکی از مؤلفه‌های کلیدی در استدلال‌های کسری است

---

[1] Dahal
[2] Ernest
[3] Lerman
[4] Russell and Chernoff
[5] Karakus
[6] Wijers
[7] Ball
[8] Cankoy
[9] Duncan
[10] Kim
[11] Quinn, Lamberg and Perrin
[12] Sundar
[13] Tsamir and Sheffer
[14] Johnson and Hwang
[15] Lo and Luo
[16] Bergestra
[17] Tirosh
[18] Johnson and Isaac

و می‌تواند در آموزش مفاهیمی مانند تقسیم بر صفر نقش مؤثری ایفا کند. همچنین لامون[1] (۱۹۹۴) و لی و همکاران[2] (۲۰۱۱) بیان کرده‌اند که انعطاف‌پذیری معلمان در انتخاب نوع بازنمایی تصویری، عاملی تعیین‌کننده در کیفیت آموزش و عمق یادگیری دانش‌آموزان است.

به‌طور کلی، مرور ادبیات پژوهشی نشان می‌دهد که آموزش مفهوم تقسیم بر صفر نیازمند رویکردی چندبعدی است که فراتر از استدلال‌های رسمی محض باشد. پژوهش‌های متعدد(بال، ۱۹۹۰؛ کرسپو و نیکول، ۲۰۰۶؛ کانکوی، ۲۰۱۰؛ زاهدی و حق‌وردی، ۱۴۰۱؛ ویجرز و همکاران، ۲۰۲۳) بر این نکته تأکید دارند که تکیه صرف بر قوانین ریاضی و الگوریتم‌ها، درک مفهومی عمیق را در دانش‌آموزان ایجاد نمی‌کند .از سوی دیگر، مطالعات جانسون و ایزاک (۲۰۱۵)، لامون (۱۹۹۴) و لو و لو (۲۰۱۲) نشان داده‌اند که بازنمایی‌های تصویری و شهودی می‌توانند نقش محوری در تسهیل درک مفاهیم انتزاعی مانند تقسیم بر صفر ایفا کنند. با این حال، یافته‌های پژوهشی حاکی از آن است که بسیاری از معلمان در به‌کارگیری مؤثر این رویکردهای تصویری و شهودی در عمل با چالش مواجه‌اند (کیم، ۲۰۰۷؛ کوین و همکاران، ۲۰۰۸؛ تسامیر و شفر، ۲۰۰۰). بنابراین، تلفیق استدلال‌های رسمی، عینی و شهودی در چارچوب نظریه‌های ساخت‌گرایی و با بهره‌گیری از ابزارهای پویا مانند جئوجبرا می‌تواند راهکاری مؤثر برای بهبود درک مفهومی دانش‌آموزان از تقسیم بر صفر و سایر مفاهیم چالش‌برانگیز ریاضی باشد. با وجود این، شکاف پژوهشی قابل توجهی در زمینه طراحی و ارزیابی مداخلات آموزشی مبتنی بر بازنمایی‌های پویا برای آموزش تقسیم بر صفر وجود دارد که پژوهش حاضر در پی پر کردن این خلأ است.

چارچوب نظری و تبیین رویکردهای آموزش تقسیم بر صفر

بررسی رویکردهای عینی و رسمی

در آموزش مفهوم تقسیم بر صفر، دو نوع رویکرد اصلی در استدلال دانش‌آموزان مشاهده می‌شود: استدلال عینی و استدلال رسمی. در استدلال عینی، دانش‌آموز از تجربیات ملموس دنیای واقعی برای معنا بخشیدن به عبارات ریاضی استفاده می‌کند، در حالی که در استدلال رسمی، استدلال صرفاً بر پایه‌ی تعاریف و قضایای ریاضی بنا می‌شود. تسامیر (۱۹۹۶) و اسکِمپ[3] (۱۹۸۹) بر این باورند که در دوره‌ی ابتدایی باید از استدلال‌های عینی برای نشان دادن عدم امکان تقسیم بر صفر استفاده شود، اما در سطوح بالاتر (دبیرستان)، انتظار می‌رود که دانش‌آموزان بتوانند از استدلال‌های رسمی برای تبیین «تعریف‌ناپذیری» تقسیم بر صفر بهره گیرند.

استدلال عینی:

منظور از استدلال عینی کمک گرفتن از تجربیات ملموس در دنیای واقعی برای رسیدن به یک مفهوم ریاضی است. دو مدل از متداول‌ترین مثال‌های عینی در دنیای واقعی برای «تعریف نشده» بودن تقسیم بر صفر به صورت زیر است:

اولین مثال برای بررسی مفهوم تقسیم بر صفر برگرفته از مطالعه تسامیر و شفر (۲۰۰۰) است: « *می‌خواهیم شش سیب را به‌طور مساوی بین صفر کودک تقسیم کنیم، به هر کودک چند سیب می‌رسد؟* » در این حالت انجام عملیات غیرممکن است و هیچ حالتی برای تقسیم کردن سیب وجود ندارد در حالتی که می‌توان این تقسیم را بر هر عدد غیر صفر در دنیای واقعی نشان داد، خارج‌قسمت در این حالت «تعریف‌نشده» در نظر گرفته می‌شود. مثال دوم مبتنی بر تفریق مکرر و برگرفته از مطالعه دانکن (۱۹۷۰) است: « *در یک سبد شش تخم‌مرغ داریم. هربار که به داخل سبد دست می‌بریم هیچ کدام را بیرون نمی‌آوریم. اگر قصد خالی کردن سبد را*

[1] Lamon
[2] Li and colleagues
[3] Skemp

داشته باشیم، چند بار باید به سراغ سبد تخم‌مرغ‌ها برویم؟ » در چنین حالتی اگر قصد خالی کردن سبد را داشته باشیم باید بارها به سراغ سبد برویم و هیچ تخم‌مرغی بیرون نیاوریم! درواقع تعداد دفعاتی که دست به سبد می‌زنیم و سبد خالی شود وجود ندارد.

در این استدلال‌های عینی، موضوع چالش‌برانگیز برای دانش‌آموزان انجام نشدن هیچ اقدامی است، به عبارتی در مثال اول به نظر می‌رسد که برای تعدادی از دانش‌آموزان درک تمایز میان اشتراک‌گذاری هیچ چیز بین تعدادی از افراد (0/a) و چیزی بین هیچ کس (a/0) دشوار است. عده‌ای از دانش‌آموزان این‌چنین استدلال می‌کنند که (هیچ کودکی سیب ندارد) بنابراین جواب صفر است و عده‌ای دیگر نیز معتقدند (هیچ کاری انجام نشد) بنابراین جواب همان چیزی است که با آن شروع کرده‌ایم.

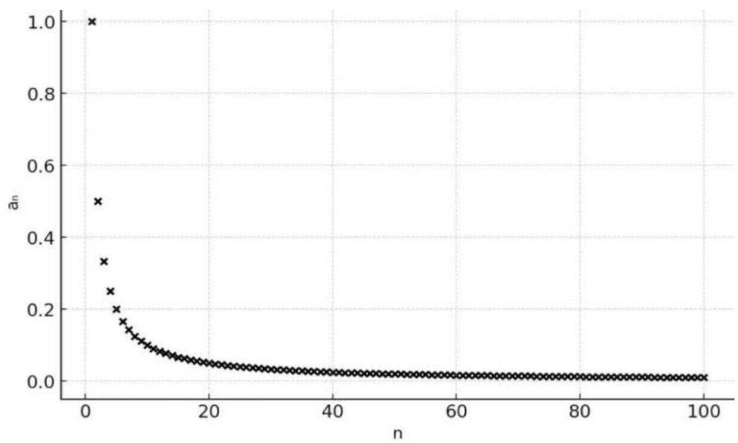
همچنین در مثال دوم که شامل برخورد مکرر دست زدن به سبد پر از تخم‌مرغ و برنداشتن هیچ یک از تخم‌مرغ‌هاست، در این مثال، مقسوم (تعداد تخم‌مرغ‌های موجود در سبد) و مقسوم‌علیه (تعداد تخم‌مرغ‌هایی که در هر بار می‌توان از سبد برداشت) هستند که شرایط اولیه را مشخص می‌کند و خارج قسمت برابر است با (تعداد دفعاتی است که یک نفر برای برداشتن تخم‌مرغ سراغ سبد می‌رود). این الگوریتم آنقدر تکرار می‌شود تا باقی‌مانده کمتر از مقسوم‌علیه شود (مقدار باقی‌مانده در سبد از مقسوم‌علیه کمتر باشد). باوجوداین، در اینجا نیز، پیوند دادن تجربه فیزیکی (برنداشتن هیچ تخم‌مرغی به‌صورت مکرر از یک سبد پر از تخم‌مرغ) و رسیدن به یک نتیجه ریاضی خاص (تقسیم بر صفر که عملیاتی تعریف نشده است) به دلیل پوچ بودن عملی که انجام می‌شود، ایجاد نمی‌شود.

استدلال رسمی:

استدلال‌های عینی با استدلال‌های رسمی تکمیل می‌شوند چراکه استدلال‌های رسمی، دقیق‌تر به قضایا و نتایج ریاضی می‌پردازند. یک استدلال رسمی، به وجود و منحصر به فرد بودن اشاره می‌کند (بلیک و ورهیل، ١۹۸۵). با توجه به $a/0=x$ ، می‌توان گفت $a=x.0$؛ اما هیچ x وجود ندارد که بتواند این معادله را برآورده کند. از این‌رو، عمل تقسیم بر صفر نه از نظر وجودی و نه از نظر یکتایی قابل تعریف نیست.

دومین استدلال رسمی استدلال تفریق مکرر بدون هیچ گونه زمینه‌سازی در دنیای واقعی است (که در بالا از طریق تخم‌مرغ در سبد نشان داده شد). برای کشف این استدلال، دانش‌آموزان با در نظر گرفتن مثال‌های ساده شروع می‌کنند، مانند ١۵ تقسیم بر ٣. از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا قبل از اینکه نتیجه صفر شود، تعداد دفعاتی را که می‌توان ٣ را از ١۵ کم کرد، تعیین نمایند. سپس قبل اینکه نتیجه صفر شود از دانش‌آموزان سؤال می‌شود چند بار می‌توان صفر را از این عدد کم کرد.

افزون بر این، برخی از استدلال‌های رسمی به مفهوم حد مرتبط می‌شوند. برای مثال، بررسی دنباله‌ی اعداد $a_n=1/n$ نشان می‌دهد که هرچه مخرج کوچک‌تر می‌شود، حاصل تقسیم بزرگ‌تر خواهد شد؛ و هنگامی که مخرج به صفر نزدیک شود، خارج‌قسمت به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. اما در نقطه‌ای که مخرج دقیقاً صفر است، هیچ مقدار معینی وجود ندارد و عمل تقسیم «تعریف‌نشده» می‌شود.



شکل ۱

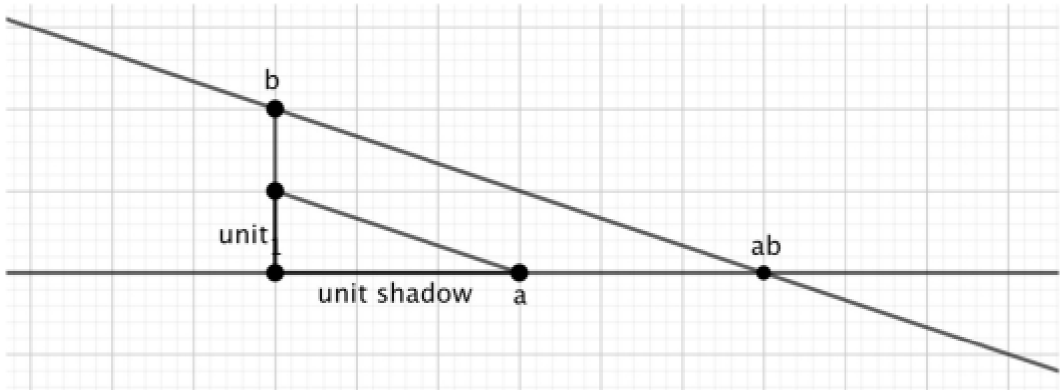
برای رفع چالش‌های تقسیم بر صفر که شرح داده شده‌اند باید تقسیم عدد بر صفر را برای دانش‌آموزان با «عدم وجود» معادل‌سازی کرد (دفریتاس و سینکلر[1]، ۲۰۱۴). ولی سؤال اینجاست که چگونه می‌توان تقسیم بر صفر را دوباره پیکربندی کرد تا یکتایی خارج قسمت در مقابل عدم وجود یک خارج قسمت نشان داده شود؛ در این مطالعه این امکان با ایجاد یک نمودار پویا بررسی و یک رویکرد شهودی برای یادگیرندگان فراهم گردید.

رویکرد نموداری و شهودی در آموزش مفهوم تقسیم بر صفر

اقلیدس روش‌هایی را برای جمع، تفریق، ضرب، و تقسیم پاره‌خط‌ها و همچنین روش‌هایی برای ساخت ریشه‌های مربع توضیح داد (هارتشورن[2]، ۲۰۱۳). دکارت روش‌هایی برای یافتن مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب یا ضریب مجموعه‌ای از پاره‌خط‌ها را تحت یک قضیه واحد سازماندهی کرد که شرایط لازم و کافی را برای امکان‌پذیر بودن چنین ساخت‌هایی مشخص می‌کرد. بر اساس این مبانی ریاضی، دروژکووا و مکلوفین (2013) یک مدل پویا و نموداری از تقسیم را ایجاد کردند که تقسیم در آن به صورت مقیاس‌بندی است که در این مدل از نمودارها برای تعریف ضرب و تقسیم، با توجه به تشابه مثلث ها، استفاده کردند. آن‌ها تعریف نموداری خود از ضرب و تقسیم را به صورت زیر بیان کردند؛

وتر در مثلث قائم‌الزاویه که توسط یک ضلع عمود و قاعده آن ضلع عمود تعیین شده است باید با وتری که با هر ضلع عمود و قاعده دیگری که رسم می‌شود موازی باشد. از این رو، دانستن قاعده یک ضلع عمود (که آن را ضلع عمود واحد می‌نامند) روشی برای استنتاج قاعده از هر ضلع عمود دیگری را به ما می‌دهد. برای ضرب طول دو پاره‌خط، یکی از پاره‌خط‌ها را انتخاب کنید و آن را a بنامید، به طوری که قاعده‌ی عمود بر ضلع واحد باشد. پاره‌خط دیگر را طوری قرار دهید منطبق با پاره‌خط واحد باشد و آن را b نامگذاری کنید. حاصل‌ضرب طول a و طولb ، طول قاعده b است؛ b توسط خطی که موازی با وتر مثلث قائم‌الزاویه و پاهای آن در امتداد پاره‌خط a است محدود شده است. (شکل شماره ۲). برای تقسیم طول دو پاره‌خط، آن دو را طوری مرتب کنید که عمود بر هم باشند؛ زمانی که وتر مثلث با ضلع واحد با وتر مثلث قائم‌الزاویه دیگر موازی شود، خارج قسمت حاصل از تقسیم طول دو پاره‌خط، طول قاعده‌ی مثلث قائم‌الزاویه با ضلع واحد است؛ در شکل شماره ۲، طول پاره‌خطa خارج قسمت حاصل از تقسیم طول پاره‌خط ab بر طول پاره خط bاست.

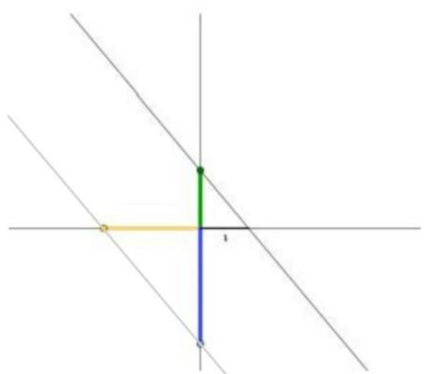
[1] de Freitas and Sinclair
[2] Hartshorne



شکل ۲

در این پژوهش با توجه به رویکرد دروژکووا و مکلوفین(۲۰۱۳)، یک نمودار قابل تبدیل در محیط جئوجبرا ایجاد شد تا به تعریف نموداری تقسیم پی ببریم؛ این نمودار نشان‌دهنده خارج قسمت حاصل از تقسیم دو پاره‌خط است که در آن قسمتی که طول آن نشان‌دهنده مقسوم است آبی رنگ، قسمتی که طول آن نشان‌دهنده مقسوم‌علیه است زرد رنگ و قسمتی که طول آن نشان‌دهنده خارج قسمت است که بصورت سبز رنگ نشان داده شده است. این انتخاب‌های رنگی برای تأکید بر روابط بین سه بخش در نظر گرفته شده بود، به این ترتیب که طول بخش آبی و طول بخش زرد، طول بخش سبز را تعیین می‌کند.

قطعه مشکی روی نمودار با برچسب "۱" یک واحد طول است. نقاط و پاره‌خط‌ها نام‌گذاری نشده‌اند به دلیل آنکه نمودار از نظر بصری ساده باشد. با جابه‌جا کردن نقاط آبی و زرد (تغییر مقادیر مقسوم و مقسوم‌علیه)، می‌توان نقاط برخورد خط با محورهای مختصات و به تبع آن مقدار خارج قسمت را تغییر داد . در این مطالعه به حالت‌های خاص تقسیم روی نمودار اشاره خواهد شد.



شکل شماره ۳

قاعده‌ی بیان شده برای تقسیم را می‌توان با کمک تشابه مثلث‌ها و قاعده‌ی امتحان تقسیم به شرح ذیل ثابت کرد: با توجه به قائم‌الزاویه بودن هر دو مثلث ایجاد شده دو زاویه ۹۰ درجه وجود دارد که از طرف دیگر با توجه به موازی رسم شدن دو وتر می‌توان

با کمک قضیه خطوط موازی و مورب به دو زاویه مساوی دیگر در دو مثلث رسید و بنا به حالت تشابه دو زاویه، دو مثلث باهم متشابه هستند بنابراین می‌توان برای آن‌ها به صورت زیر نسبت تشابه نوشت و از آن به راحتی به قاعده‌ی امتحان تقسیم رسید.

$$\frac{ab}{a} = \frac{b}{1} \rightarrow ab = a \times b$$

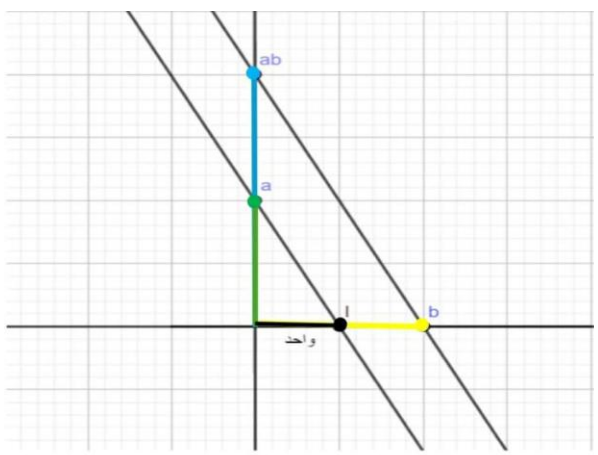
بر این اساس مثال‌هایی از حالات مختلف تقسیم به کمک نمودار پویا:مطرح می شود:

۱- تقسیم عددی مثبت بر عددی مثبت:

$$\frac{ab}{b} = a \ \ (ab > 0 ،b > 0)$$

مثال:

ab = 4 و b = 2 → $\frac{4}{2} = 2$



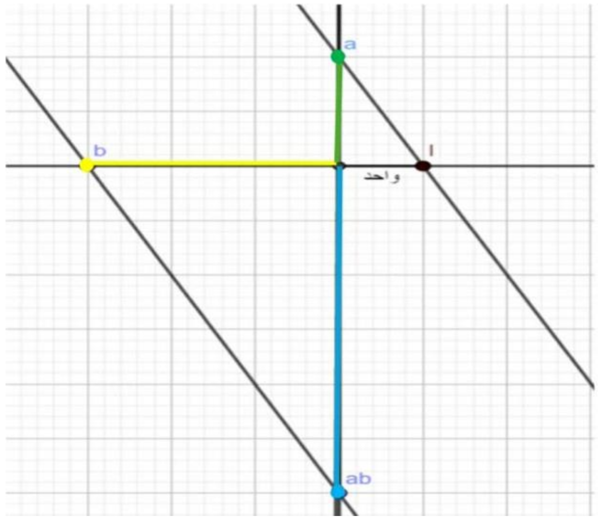
شکل۴ (نمایش نمودار حاصل تقسیم $\frac{4}{2} = 2$)

۲- تقسیم عددی منفی بر عددی منفی:

$$\frac{ab}{b} = a(ab < 0 ،b < 0)$$

مثال:

ab = -6 و b = -3 → $\frac{-6}{-3} = 2$



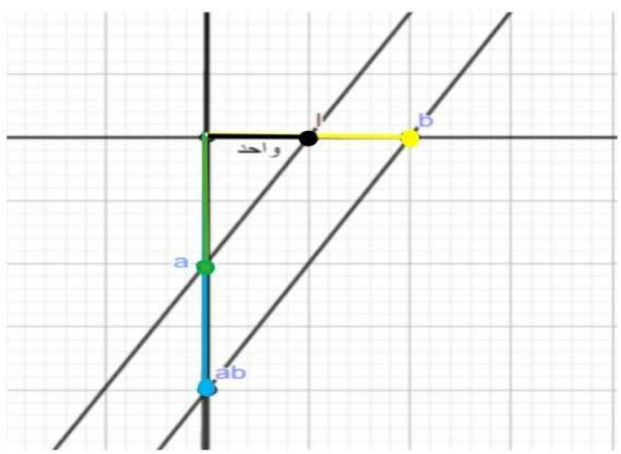
شکل ۵ (نمایش نمودار حاصل تقسیم $2 = \frac{-6}{-3}$)

۳- تقسیم عددی منفی بر عددی مثبت:

$$\frac{ab}{b} = a \quad (ab < 0 \,،\, b > 0):$$

مثال:

$$ab = -4 \text{ و } b = 2 \rightarrow \frac{-4}{2} = -2$$



شکل ۶ (نمایش نمودار حاصل تقسیم $-2 = \frac{-4}{2}$)

در ادامه مثالی بیان می شود که مقسوم‌علیه عددی، کمتر از واحد باشد:

۴- تقسیم عددی مثبت بر عددی مثبت و کوچکتر از واحد:

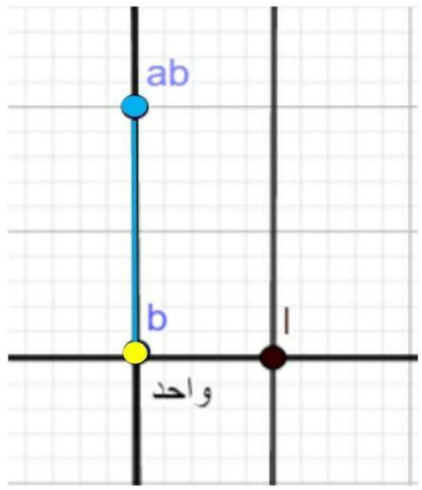
$$\frac{ab}{b} = a(\mathrm{ab} > 0 \cdot ،< \mathrm{b} < 1)$$

مثال:

$$\mathrm{ab} = 2 \text{ و } \mathrm{b} = 0.2 \rightarrow \frac{2}{0.2} = 10$$

شکل ۷ (نمایش نمودار حاصل تقسیم $\frac{2}{0.2} = 10$ **)**

همان‌طور که واضح است با کم کردن مقدار مقسوم‌علیه (b) و نزدیک کردن آن به صفر مقدار خارج قسمت افزایش پیدا می‌کند. در واقع طول پاره‌خط a که نشان‌دهنده مقدار خارج قسمت است با کم کردن مقسوم‌علیه بیشتر می‌شود .حال اگر b را دقیقاً صفر قرار داده شود برای رسم وتر دوم که قرار است موازی با وتر اول رسم شود چاره‌ای جز رسم موازی محور عرض‌ها وجود ندارد که در این صورت چون محور عرض‌ها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند بنابراین خارج قسمتی هم موجود نیست که به عنوان حاصل تقسیم معرفی شود و این تقسیم «تعریف نشده» شناخته می‌شود. شکل شماره ۸ تقسیم عدد بر صفر را نشان می‌دهد که هیچ پاسخی برای آن یافت نمی‌شود.



شکل ۸: تقسیم عدد بر صفر

چگونه ممکن است دانش‌آموزان به این ناپدید شدن واکنش نشان دهند؟ یک احتمال این است که دانش‌آموزان به درستی به این نتیجه برسند که وقتی مقسوم‌علیه صفر باشد، تقسیم «تعریف نشده» است. چنین نتیجه‌گیری وابسته به چگونگی برخورد آن‌ها با نمودار پویا است. همچنین می‌توانند این‌چنین تحلیل کنند که دلیل ناپدید شدن قطعه خارج قسمت به دلیل موازی شدن خط مقسوم‌علیه با محور y است و به نتیجه مطلوب‌تری دست پیدا نکنند. احتمال دیگر این است که دانش‌آموزان بتوانند نتیجه بگیرند که خط مقسوم‌علیه و محور y در بی‌نهایت در صورتی که در یک صفحه محاط شوند یکدیگر را قطع می‌کنند. احتمال سوم هم این است که دانش‌آموزان از ناپدید شدن ناگهانی بخش خارج قسمت تعجب کنند و نتوانند توضیح دهند که کجا رفته است.

روش

پژوهش حاضر از نظر هدف، کاربردی و از نظر نحوه گردآوری داده‌ها، از نوع نیمه تجربی است. طرح پژوهش به‌صورت پیش‌آزمون – پس‌آزمون تک‌گروهی انجام شده است تا تأثیر مداخله آموزشی مبتنی بر نمودارهای پویا در درک مفهوم تقسیم بر صفر بررسی شود. جامعه‌ی آماری شامل تمامی دانش‌آموزان دوره‌ی متوسطه دوم شهرستان شازند بود. از میان آن‌ها، ۷۰ نفر به‌صورت تصادفی ساده انتخاب شدند. پس از حذف پاسخ‌نامه‌های ناقص، حجم نهایی نمونه ۶۲ نفر تعیین گردید.

ابزار اصلی گردآوری داده‌ها، پرسش‌نامه‌ی عملکردی شامل چند مسئله‌ی مرتبط با تقسیم عددی بود که در دو نوبت (پیش‌آزمون و پس‌آزمون) اجرا شد. این پرسش‌نامه بر اساس ابزار پژوهش بال (۱۹۹۸) طراحی و پس از بومی‌سازی و بازنگری محتوایی مورد استفاده قرار گرفت. برای تعیین روایی محتوا، پرسش‌نامه در اختیار سه نفر از اساتید حوزه‌ی آموزش ریاضی قرار گرفت و اصلاحات لازم انجام شد. همچنین پایایی ابزار با استفاده از ضریب آلفای کرونباخ ($\alpha = 0.78$) مورد تأیید قرار گرفت که نشان‌دهنده‌ی همسانی درونی مطلوب ابزار است. پژوهش حاضر در فروردین ۱۴۰۳ انجام شد. در مرحله‌ی نخست، پیش‌آزمون برای سنجش دانش اولیه‌ی دانش‌آموزان در زمینه‌ی مفهوم تقسیم بر صفر اجراگردید. سپس گروه نمونه طی دو جلسه ی آموزشی با نمودارهای پویا در نرم افزار جئوجبرا کار کردند تا مفهوم تقسیم بر صفر را بهتر درک کنند. در این آموزش، دانش‌آموزان ضمن دست‌ورزی مستقیم روی نمودار،

تغییرات بین مقسوم، مقسوم‌علیه و خارج‌قسمت را مشاهده و تحلیل کردند. در پایان، همان آزمون به‌عنوان پس‌آزمون مجدداً اجرا گردید.

مداخله آموزشی

پس از اجرای پیش‌آزمون، نمودار پویا برای تبیین مفهوم «تعریف‌ناپذیری» تقسیم بر صفر در اختیار دانش‌آموزان قرار گرفت. پیش از آغاز فعالیت، توضیح کوتاهی درباره‌ی محیط نرم‌افزار جئوجبرا ارائه شد تا دانش‌آموزان با شیوه‌ی کار آشنا شوند. سپس برای بررسی عمیق‌تر درک مفهومی آنان، مصاحبه‌های نیمه‌ساختاریافته‌ای با دو دانش‌آموز (الف و ب) انجام شد[۱]. از شرکت‌کنندگان خواسته شد با جابه‌جایی نقاط مختلف نمودار، رابطه‌ی بین مقسوم، مقسوم‌علیه و خارج‌قسمت را توصیف کنند و استدلال‌های خود را توضیح دهند. پرسش‌ها از سؤالات کلی مانند «*آنچه می‌بینید را توصیف کنید*» آغاز شد و به‌تدریج به سؤالات تخصصی‌تری نظیر «*چه بخشی از نمودار قابل جابه‌جایی است؟*» و «*چگونه می‌توان موقعیت نقطه سبز را برحسب نقاط زرد و آبی بیان کرد؟*» منتهی گردید. به شرکت‌کنندگان مستقیماً گفته نشد که نمودار مربوط به تقسیم است، بلکه از آنان خواسته شد روابط بین پاره‌خط‌های رنگی را بررسی و فرضیه‌های خود را آزمایش کنند. در بخش کلیدی مصاحبه، زمانی که نقطه‌ی زرد (مقسوم‌علیه) به صفر نزدیک شد، هر دو دانش‌آموز متوجه ناپدید شدن پاره‌خط سبز (خارج‌قسمت) شدند. دانش‌آموز «الف» اظهار داشت: «*وقتی نقطه‌ی زرد روی صفر قرار می‌گیرد، رنگ سبز ناپدید می‌شود؛ یعنی در تقسیم بر صفر جوابی وجود ندارد.*» دانش‌آموز «ب» نیز تأیید کرد: «*پاره‌خط سبز دیده نمی‌شود، پس نمی‌توان این عمل را انجام داد.*»

این مشاهدات نشان داد که هر دو دانش‌آموز با تجربه‌ی بصری نمودار، مفهوم «*تعریف‌ناپذیری تقسیم بر صفر*» را به‌صورت شهودی درک کردند. در ادامه، شرکت‌کنندگان توضیح دادند که در هنگام قرار دادن نقطه‌ی زرد در مبدأ، خطی عمودی و موازی محور y ظاهر می‌شود که با محور تلاقی ندارد؛ آن را نشانه‌ای از «*عدم وجود خارج‌قسمت*» دانستند. در مجموع، تعامل پویای آنان با نمودار موجب شد تا با استدلالی بصری و تجربی به همان نتیجه‌ی ریاضی رسمی برسند که تقسیم بر صفر تعریف‌ناپذیر است.

کدگذاری داده‌ها

پاسخ‌های دانش‌آموزان به مسئله مطرح شده در پیش‌آزمون و پس‌آزمون بر اساس درستی یا نادرستی و با توجه به رویکرد مورد استفاده آن‌ها برای حل مسئله، طبقه‌بندی شدند. دو طرح کدگذاری در این پژوهش استفاده شده است. راه‌حل‌های صحیح دانش‌آموزان بر اساس مطالعات سان و کرسپو (۲۰۰۹) و اسمیت و بوستون[۲] (۲۰۰۹)، در سه دسته طبقه‌بندی شدند:

- به‌کارگیری بازنمایی تصویری
- به‌کارگیری استدلال‌های عینی
- به‌کارگیری استدلال‌های رسمی

---

[۱] مصاحبه‌ها به‌صورت صوتی ضبط شد و چگونگی مواجهه شرکت‌کنندگان با نمودار از طریق ضبط صفحه ثبت شد و صداهای ضبط شده در هر مصاحبه به‌صورت کتبی نوشته شد.

[2] Sith & Boston

راه‌حل‌های غلط دانش‌آموزان بر اساس مطالعات ایسیکسال و چاکیروغلو[1] (۲۰۱۱) در رابطه با بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان در مورد عملیات تقسیم به چهار دسته طبقه‌بندی شدند:

- اشتباهات مبتنی بر الگوریتم[2]
- اشتباهات مبتنی بر شهود[3]
- درک نادرست از نمادگذاری کسر در تقسیم[4]
- درک نادرست مسائل

جدول ۱: توزیع فراوانی و درصد پاسخ‌های صحیح و غلط در پیش‌آزمون و پس‌آزمون

کد	فراوانی در پیش آزمون	درصد در پیش آزمون	فراوانی در پس آزمون	درصد در پس آزمون
پاسخ صحیح مبتنی بر بازنمایی تصویری	۰	0%	۴۵	72.6%
پاسخ صحیح مبتنی بر استدلال عینی	۹	14.5%	۸	12.9%
پاسخ صحیح مبتنی بر استدلال رسمی	۱۸	29%	۰	0%
مجموع	۲۷	43.5%	۵۳	85/5%
اشتباهات مبتنی بر الگوریتم	۴	6.5%	۰	0%
اشتباهات مبتنی بر شهود	۲	3.2%	۴	6.5%
درک نادرست از نمادگذاری کسر در تقسیم	۱۳	21%	۰	0%
درک نادرست مسائل	۹	14.5%	۵	8%
مجموع	۲۸	28%	۹	14.5%

[1] Işıksal & Çakıroğlu
[2] Algorithmically based mistakes
[3] Intuitively based mistakes
[4] Mistakes based on formal knowledge of fraction operations

تحلیل یافته‌ها

در این پژوهش برای بررسی تأثیر مداخله آموزشی مبتنی بر نمودار پویای جئوجبرا بر درک دانش‌آموزان از مفهوم «تقسیم بر صفر»، از طراحی پیش‌آزمون – پس‌آزمون با یک گروه آموزشی استفاده شد. داده‌های به‌دست‌آمده از پاسخ‌های دانش‌آموزان به پرسشنامه‌ی عملکردی، ابتدا از نظر درستی پاسخ‌ها و نوع استدلال به‌کاررفته بر اساس چارچوب‌های سان و کرسپو (۲۰۰۹) و اسمیت و تامپسون (۲۰۰۸) طبقه‌بندی گردید. سپس توزیع فراوانی پاسخ‌ها در پیش‌آزمون و پس‌آزمون محاسبه شد. برای تحلیل آماری داده‌ها، در گام نخست، آمار توصیفی شامل میانگین، انحراف معیار و درصد پاسخ‌های صحیح و غلط گزارش گردید. در گام بعد، برای بررسی تغییرات معنادار در عملکرد دانش‌آموزان پیش و پس از مداخله، از آزمون t همبسته[1] استفاده شد؛ این آزمون تفاوت میانگین نمرات پیش‌آزمون و پس‌آزمون را مورد ارزیابی قرار داد.

پیش از انجام آزمون، فرض نرمال بودن داده‌ها با آزمون شاپیرو–ویلک بررسی شد. در صورتی که فرض نرمال بودن نقض می‌شد، از آزمون ناپارامتریک ویلکاکسون[2] برای مقایسه دو مرحله استفاده گردید؛ همچنین به‌منظور کنترل اثر پیش‌آزمون و بررسی خالص اثر مداخله، از تحلیل کوواریانس[3] استفاده شد که در آن نمره پس‌آزمون به‌عنوان متغیر وابسته، نمره پیش‌آزمون به‌عنوان کوواریانت و نوع آموزش (سنتی یا مبتنی بر نمودار پویا) به‌عنوان متغیر مستقل وارد مدل گردید. افزون بر تحلیل‌های کمی، پاسخ‌های کیفی دانش‌آموزان در مصاحبه‌ها با روش تحلیل محتوای استقرایی بررسی شدند تا تغییر در نوع استدلال و بازنمایی ذهنی آنان نسبت به مفهوم تقسیم بر صفر تبیین گردد. داده‌های کیفی پس از پیاده‌سازی، کدگذاری و در قالب مقوله‌های مفهومی تحلیل شدند تا یافته‌های آماری تکمیل و تفسیر شوند. برای تحلیل کمی داده‌ها در ابتدا درصد پاسخ‌های صحیح و غلط در مراحل پیش‌آزمون و پس‌آزمون محاسبه گردید. نتایج جدول (۱) نشان می‌دهد که فراوانی پاسخ‌های صحیح دانش‌آموزان پس از اجرای مداخله آموزشی افزایش چشمگیری داشته است (از ۲۷ پاسخ صحیح در پیش‌آزمون به ۵۳ پاسخ صحیح در پس‌آزمون).

جدول ۲: نتایج آماری پیش‌آزمون و پس‌آزمون از درک مفهوم تقسیم عدد بر صفر

شاخص آماری	میانگین(M)	انحراف معیار(SD)	T (61)	p	Cohen’s d	نتیجه
پیش آزمون	۰/۴۴	۰/۱۸	–	–	–	–
پس آزمون	۰/۸۵	۰/۱۴	۸/۷۲	< 001/0	۱/۱۱	تفاوت معنادار

نتایج آزمون t همبسته نشان داد میانگین نمرات دانش‌آموزان در پس‌آزمون به‌طور معناداری بیشتر از پیش‌آزمون بود ($t(61) = 8.72, p < 0.001$). مقدار $Cohen’s\ d = 1.11$ بیانگر اثر قابل توجه مداخله آموزشی مبتنی بر نمودار پویاست. بر اساس آزمون شاپیرو–ویلک ($p = 0.21$)، فرض نرمال بودن داده‌ها تأیید شد و استفاده از آزمون t مناسب بود. همچنین نتایج تحلیل کوواریانس (ANCOVA) برای کنترل اثر پیش‌آزمون نشان داد که پس از حذف اثر آن، تفاوت میانگین نمرات پس‌آزمون بین دو

[1] Paired Samples t-test
[2] Wilcoxon signed-rank test
[3] ANCOVA

گروه (سنتی و مبتنی بر نمودار پویا) همچنان معنادار باقی ماند ($F(1,59) = 14.36, p < 0.001, \eta^2 = 0.20$). این نتایج نشان‌دهنده‌ی سهم قابل توجه روش آموزش مبتنی بر نمودار پویا در افزایش درک مفهومی دانش‌آموزان از تقسیم بر صفر است.

بحث و نتیجه‌گیری

نتایج پژوهش حاضر نشان داد که استفاده از نمودارهای پویا در محیط جئوجبرا تأثیر چشمگیری بر درک مفهومی دانش‌آموزان از مفهوم «تقسیم بر صفر» دارد. پس از اجرای مداخله آموزشی، میانگین پاسخ‌های صحیح دانش‌آموزان از ۴۳.۵ درصد در پیش‌آزمون به ۸۵.۵ درصد در پس‌آزمون افزایش یافت. این بهبود ۴۲ درصدی همراه با اندازه اثر بزرگ (Cohen’s d = 1.11) نشان‌دهنده‌ی تأثیر قابل‌توجه و معنادار مداخله است($p< 0/001$). از منظر کیفی نیز مشاهده شد که نوع استدلال دانش‌آموزان از سطح انتزاعی و رسمی به استدلال‌های شهودی و تصویری تغییر یافت. آن‌ها به‌جای تکرار قوانین حفظ‌شده، با تکیه بر تجربه‌ی بصری خود از نمودار پویا توانستند «تعریف‌ناپذیری تقسیم بر صفر» را به‌صورت مفهومی درک و توضیح دهند. این یافته هم‌راستا با پژوهش‌های بال(۱۹۹۰)، تسامیر و شفر(۲۰۰۰) و کرسپو و نیکول(۲۰۰۶) است که نشان داده‌اند یادگیری مفاهیم انتزاعی بدون تجربه‌ی عینی منجر به بدفهمی پایدار در یادگیرندگان می‌شود. در این پژوهش، دانش‌آموزان هنگام مشاهده‌ی ناپدید شدن پاره‌خط خارج‌قسمت در زمان نزدیک شدن مقسوم‌علیه به صفر، تجربه‌ای ملموس از «عدم وجود خارج‌قسمت» به‌دست آوردند. این تجربه، پلی میان استدلال‌های عینی و رسمی ایجاد کرد و ارتباطی معنادار میان درک شهودی و مفاهیم ریاضی فراهم آورد. در واقع، تعامل فعال با نمودار پویا موجب شد یادگیری از حالت سطحی و مبتنی بر قانون به درکی مفهومی و ماندگار تبدیل شود. یافته‌های این پژوهش با نتایج متاآنالیزهای انجام‌شده درباره‌ی اثربخشی جئوجبرا در آموزش ریاضی نیز همسو است. تحلیل ۲۹ مطالعه با بیش از ۲۰۰۰ دانش‌آموز نشان داده است که اندازه اثر کلی استفاده از جئوجبرا بر توانایی‌های ریاضی برابر با ۰.۹۶ است (اثری قوی). در پژوهش حاضر، اندازه اثر ۱.۱۱ ناشی از تمرکز ویژه بر مفهوم پیچیده‌ی تقسیم بر صفر و استفاده از بازنمایی‌های پویا و تعاملی بوده است. از منظر نظری، نتایج این تحقیق با مبانی ساخت‌گرایی (پیاژه، ویگوتسکی) و نظریه‌ی بازنمایی‌های چندگانه‌ی برونر هم‌خوانی دارد. یادگیری در این فرآیند فعال، اکتشافی و چندوجهی بود و دانش‌آموزان در سطوح عملی، تصویری و نمادین درگیر شدند. این هم‌پوشانی میان تجربه و تفکر انتزاعی، همان چیزی است که فیشبین (۱۹۸۷)[1]از آن به‌عنوان «ضرورت شهود در یادگیری واقعی» یاد می‌کند. از نظر کاربردی، این پژوهش نشان می‌دهد که به‌کارگیری فناوری‌های آموزشی مانند جوجبرا می‌تواند ابزار مؤثری برای تدریس مفاهیم دشوار ریاضی باشد. پیشنهاد می‌شود معلمان در کنار استدلال‌های رسمی، از بازنمایی‌های تصویری و پویا استفاده کنند تا درک عمیق‌تر و پایدارتری در دانش‌آموزان ایجاد شود. همچنین، پیشنهاد می‌شود وزارت آموزش و پرورش و دانشگاه‌های تربیت‌معلم برنامه‌های توسعه‌ی حرفه‌ای ویژه‌ای برای آموزش مؤثر فناوری‌های تعاملی به معلمان طراحی کنند تا این ابزارها به‌طور نظام‌مند در کلاس‌های ریاضی به‌کار گرفته شوند.

در مجموع، این پژوهش گامی عملی و نظری در جهت بازنگری شیوه‌های سنتی آموزش ریاضی است و می‌تواند زمینه‌ساز پژوهش‌های آینده در زمینه‌ی ادغام شهود، فناوری و آموزش مفاهیم انتزاعی ریاضی باشد.

[1] Fishbein

Resource

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. Journal for Research in Mathematics Education, 21(2), 132–144.

Bergstra, J. A. (2021). Division by zero in logic and computing. arXiv preprint arXiv:2101.05277.

Blake, R., & Verhille, C. (1985). The story of 0. For the Learning of Mathematics, 5(3), 35–47.

Cankoy, O. (2010). Mathematics teachers' topic-specific pedagogical content knowledge in the context of teaching a°, 0! and a÷0. Educational Sciences: Theory & Practice, 10(2), 749–769.

Clark-Wilson, A., Robutti, O., & Thomas, M. (2024). Mathematics teaching, learning, and assessment in the digital age. ZDM – Mathematics Education, 56, 965–980. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01612-9

Crespo, S., & Nicol, C. (2006). Challenging preservice teachers' mathematical understanding: The case of division by zero. School Science and Mathematics, 106(2), 84–97.

Dahal, N. D. (2022). Enhancing student-teachers' assessment skills: A self- and peer-assessment tool in higher education. Journal of Education, Teaching and Learning, 7(2), 152–160.

de Freitas, E., & Sinclair, N. (2014). Mathematics and the body: Material entanglements in the classroom. Cambridge University Press.

Duncan, H. F. (1991). Division by zero. Arithmetic Teacher, 18(6), 381–382.

Ernest, P. (1988). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. Presented at the 6th International Congress on Mathematical Education (ICME VI), Budapest, Hungary.

Fishbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics: An educational approach. Springer.

Hartshorne, R. (2013). Geometry: Euclid and beyond. Springer Science & Business Media.

Işıksal, M., & Çakıroğlu, E. (2011). The nature of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge: The case of multiplication of fractions. Journal of Mathematics Teacher Education, 14(3), 213–230.

Johnson, H. L., & Hwang, J. (2016). Relationship between problem-solving and conceptual understanding. Journal of Mathematical Behavior, 44, 53–69.

Kaplan, R. (2000). The nothing that is: A natural history of zero. Oxford University Press.

Karakus, F. (2018). Investigation of pre-service teachers' pedagogical content knowledge related to division by zero. International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 19(1).

Kim, Y. O. (2007). Explaining the impossibility of division by zero: Approaches of Chinese and Korean middle school mathematics teachers. Research in Mathematics Education, 11(1), 33–51.

Lamon, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics (pp. 89–120). SUNY Press.

Lerman, S. (1998). Why children fail and what mathematics education studies can do about it: The role of sociology. In P. Gates (Ed.), Proceedings of the First International Conference on Mathematics Education and Society (pp. 26–33). Centre for the Study of Mathematics Education, University of Nottingham.

Li, Y., Chen, X., & Kulm, G. (2011). Mathematics teachers' practices and thinking in lesson plan development: A case of teaching fraction division. ZDM Mathematics Education, 43(5), 717–731.

Liburd, K. K. D., & Jen, H.-Y. (2021). Investigating the effectiveness of using a technological approach on students' achievement in mathematics: Case study of a high school in a Caribbean country. Sustainability, 13(10), 5586.

Lo, J. J., & Luo, F. (2012). Prospective elementary teachers' knowledge of fraction division. Journal of Mathematics Teacher Education, 15(6), 481–500.

McLoughlin, P., & Droujkova, M. (2013). A geometric approach to defining multiplication. arXiv preprint arXiv:1301.6602.

Mehri Takmeh, M., Fariberzi Araki, M. A., & Reihani, E. (1401). *The effectiveness of instruction using GeoGebra-generated examples on learning secondary geometry theorems.* Educational Technology, 17(1), 23–38. . [In Persian]

Quinn, R. J., Lamberg, T. D., & Perrin, J. R. (2008). Teacher perceptions of division by zero. The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, 81(3), 101–104.

Russell, G., & Chernoff, E. J. (2011). Seeking more than nothing: Two elementary teachers' conceptions of zero. The Mathematics Enthusiast, 8(1), 77–112.

Skemp, R. R. (1989). Mathematics in the primary school. Routledge.

Skemp, R. (1397). Mathematics in the Primary School, translate by, Haghverdi, M. and Heidari Ghezeljeh, R. Arak Branch, Islamic Azad University Press. [In Persian]

Smith, J., & Doe, A. (2021). A visual approach for solving problems with fractions. Education Sciences, 11(11), 727.

Smith, M. S., & Boston, M. D. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: Increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. Journal for Research in Mathematics Education, 40(2), 119–156.

Son, J. W., & Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. Journal of Mathematics Teacher Education, 12(4), 235–261.

Sundar, V. K. (1990). Thou shalt not divide by zero. The Arithmetic Teacher, 37(7), 50–51.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. Journal for Research in Mathematics Education, 31(1), 5–25.

Tsamir, P. (1996). The development of the concept of zero in young children [Unpublished doctoral dissertation]. Tel Aviv University.

Tsamir, P., & Sheffer, R. (2000). Concrete and formal arguments: The case of division by zero. Mathematics Education Research Journal, 12(2), 92–106.

Wijers, M., Jonker, V., & Drijvers, P. (2023). Characterizing external visualization in mathematics education research: A scoping review. ZDM – Mathematics Education, 55, 1161–1180. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01494-3.

Zahedi, M. (1401). *Examining the flexibility of elementary student-teachers with whole units in solving fraction division problems* (Unpublished master's thesis). Islamic Azad University, Arak. [In Persian]

Zahedi, M., & Hagverdi, M. (1401). *Strategies for fraction division: An aspect of mathematical content knowledge.* Roshd Journal of Mathematics Education, (142), 4–11. [In Persian]

Zhang, Y., Wang, P., Jia, W., Zhang, A., & Chen, G. (2023). Dynamic visualization by GeoGebra for mathematics learning: A meta-analysis of 20 years of research. Journal of Research on Technology in Education, 55, 1–22.

پیوست ها

پیوست ۱: مثال های تکمیلی کار با نرم افزار جئوجبرا

ایجاد نمودار تقسیم در محیط جئوجبرا:

نرم‌افزار جئوجبرا را اجرا کنید.

محورهای مختصات را فعال نمایید.

یک پاره‌خط به طول ۱ (واحد) روی محور x رسم کنید.

نقطه‌ای روی محور x ایجاد کرده و آن را به عنوان مقسوم‌علیه (b) در نظر بگیرید.

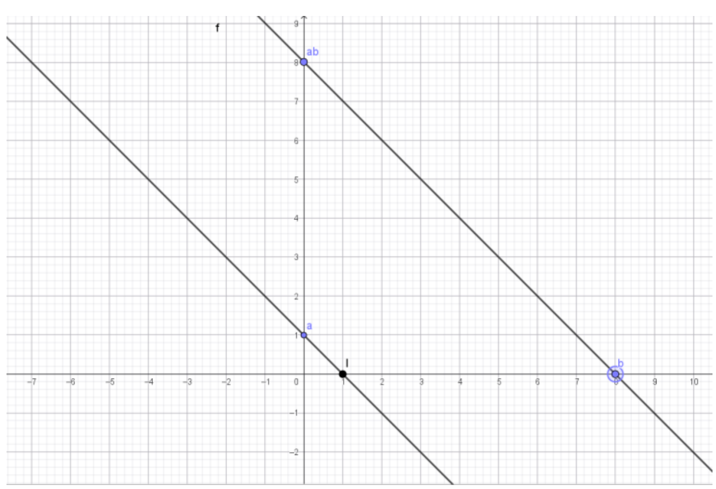
نقطه‌ای روی محور y ایجاد کرده و آن را به عنوان مقسوم (ab) در نظر بگیرید.

با استفاده از ابزار «خط موازی»، از نقطه مقسوم‌علیه خطی موازی با وتر مثلث واحد رسم کنید.

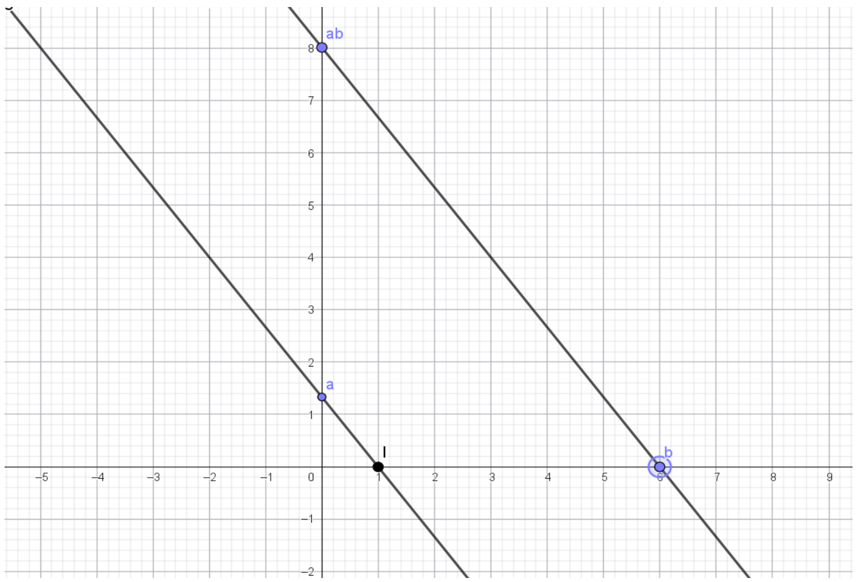
محل تقاطع این خط با محور y مقدار خارج‌قسمت (a) را نشان می‌دهد.

با جابه‌جایی نقطه مربوط به b، تغییرات خارج‌قسمت را مشاهده کنید.

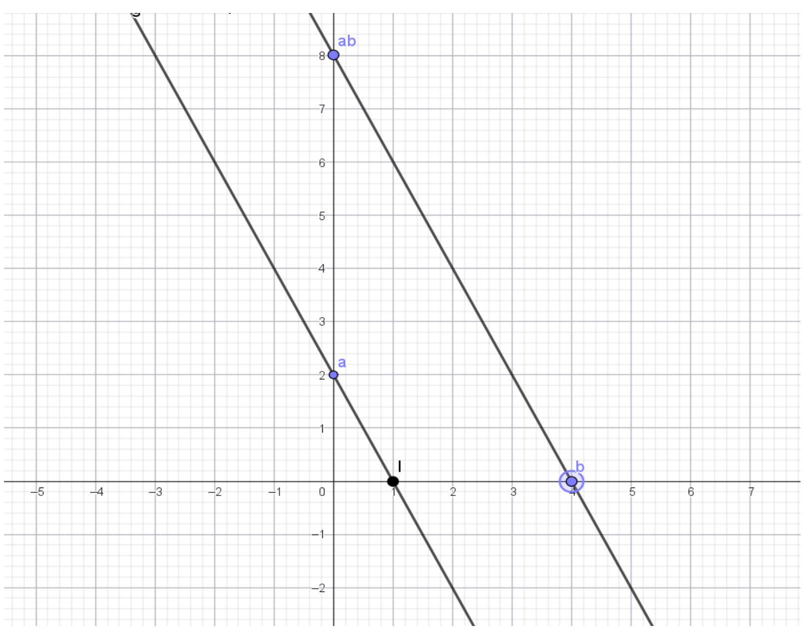
در مثال زیر با در نظر گرفتن عدد۸ به عنوان مقسوم (ab) و با کم کردن مقدار مقسوم علیه (b) و بردن آن به سمت صفر تغییرات خارج قسمت (a) نشان داده می شود:



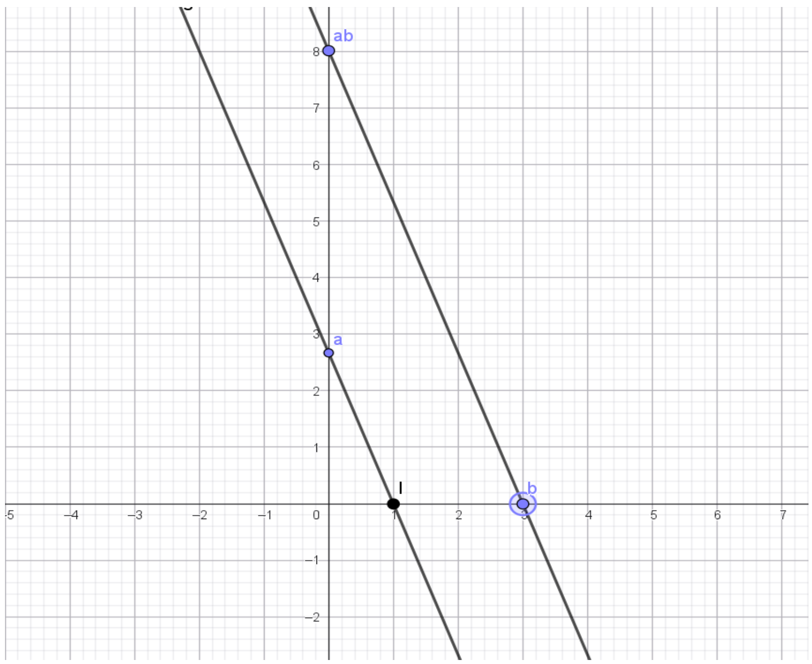
شکل۹: $\frac{8}{8} = 1$



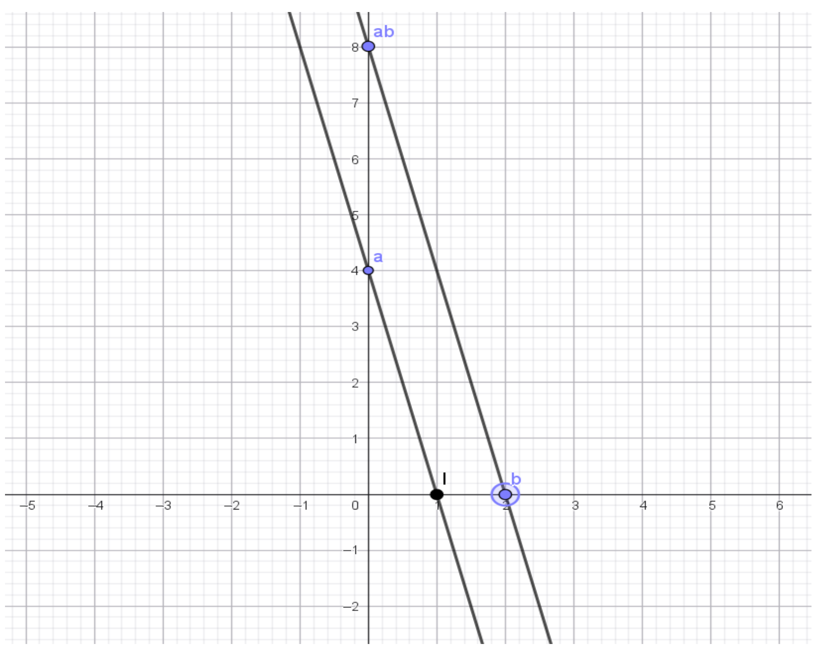
شکل۱۰: $\frac{8}{6} = 1.3$



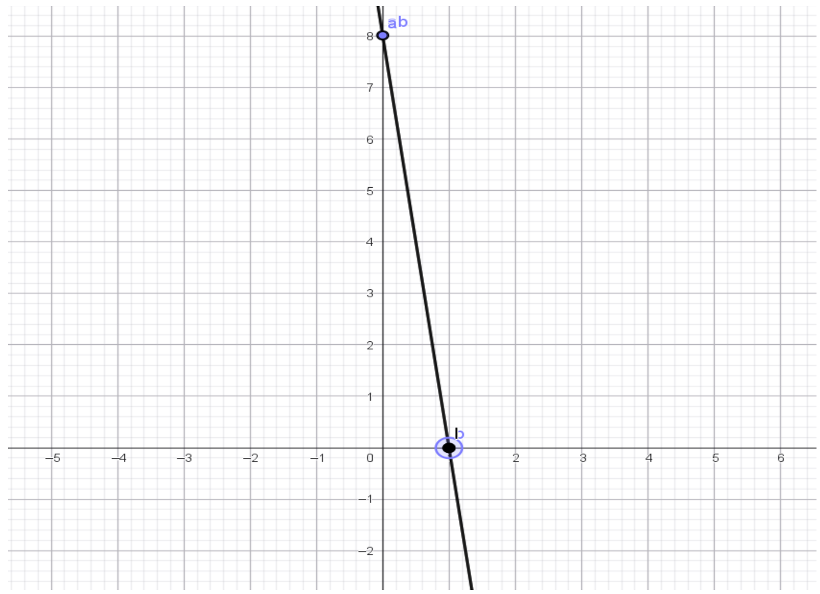
شکل۱۱: $\frac{8}{4} = 2$



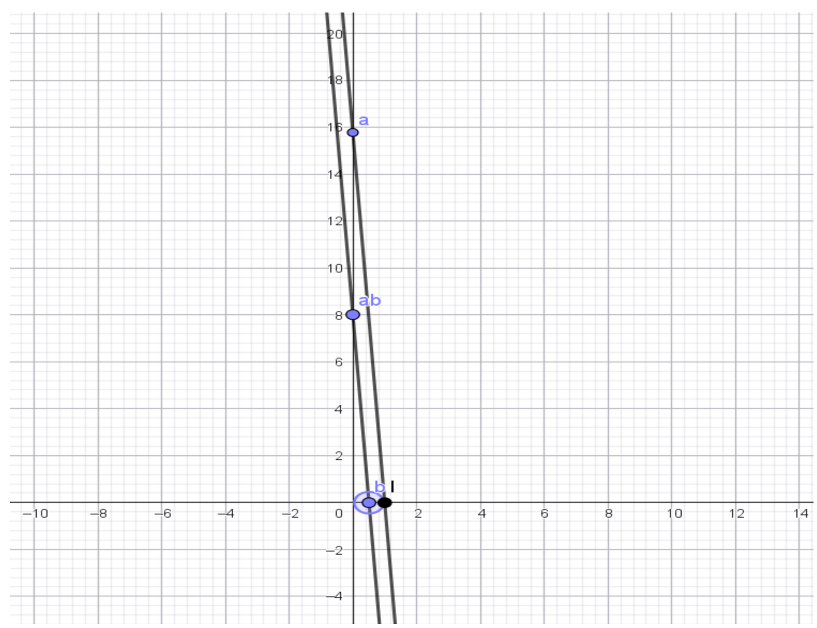
شکل۱۲: $\frac{8}{3} = 2.6$



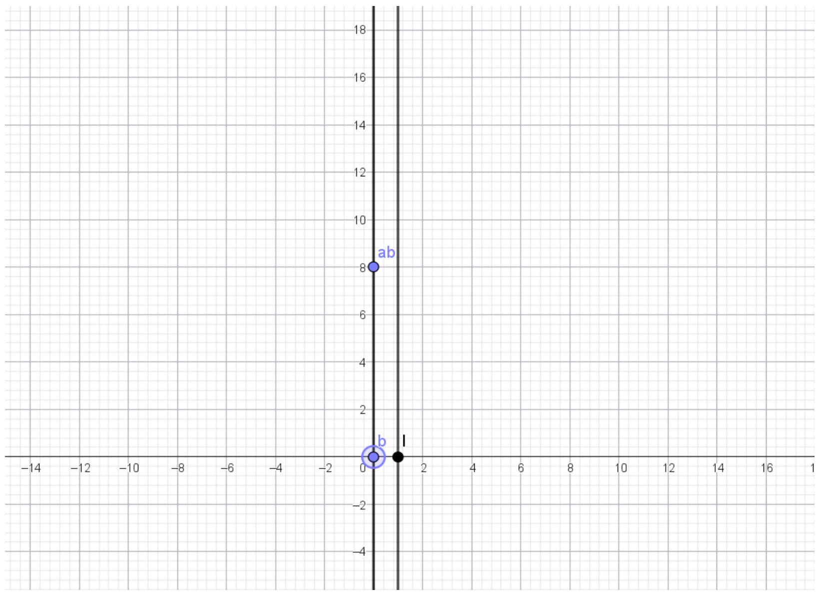
شکل۱۳: $\frac{8}{2} = 4$



شکل۱۴: $\frac{8}{1} = 8$



شکل۱۵: $\frac{8}{0.5} = 16$



شکل۱۶: جواب ندارد $= \frac{8}{0}$

همانطور که دیده می شود با قرار گرفتن مقسوم علیه روی عدد صفر مقدارa یعنی خارج قسمت ناپدید شده و جوابی یافته نمی شود.

پیوست ۲: پرسشنامه پیش آزمون و پس آزمون

پرسشنامه پیش آزمون

۱. آیا عبارت $0 \div 6$ دارای پاسخ است؟ در صورت مثبت بودن، مقدار آن را بنویسید و در غیر این صورت دلیل خود را توضیح دهید.

۲. تفاوت بین دو عبارت $0 \div 6$ و $6 \div ۰$ را توضیح دهید.

۳. الف) عبارت $6 \div 3 = 2$ را به صورت یک رابطه ضرب بازنویسی کنید.
ب) حال اگر فرض کنیم $6 \div 0 = x$ باشد، آن را به صورت رابطه ضرب بنویسید.
ج) با توجه به رابطه به دست آمده، نظر خود را دباره درستی یا نادرستی عبارت زیر توضیح دهید:
"چون هر عددی را در صفر ضرب کنیم حاصل صفر می شود، پس $6 \div 0 = 0$".

۴. چندبار می توان صفر را از عدد ۸ کم کرد تا به صفر برسیم؟ پاسخ خود را همراه با توضیح بنویسید.
الف) آیا این مسئله می تواند به صورت یک تقسیم نوشته شود؟ اگر جواب مثبت است آن را به صورت عبارت تقسیم بیان کنید.
ب) بر اساس پاسخ خود، توضیح دهید تقسیم برصفر تعریف پذیر است یا تعریف پذیر نیست.

۵. اگر $a \div b = c$ باشد، رابطه را به صورت ضرب باز نویسی کنید.
حال بررسی کنید اگر $b = 0$ باشد چه نتیجه ای حاصل می شود.

پرسشنامه پس آزمون

۱. آیا عبارت $0 \div 5$ تعریف شده است؟ در صورت مثبت بودن، مقدار آن را بنویسید و در غیر این صورت دلیل خود را توضیح دهید.

۲. تفاوت بین دو عبارت $0 \div 7$ و $7 \div ۰$ را توضیح دهید. پاسخ خود را همراه با استدلال بیان کنید.

۳. در نمودار پویا مشاهده شد که با کاهش مقدار مقسوم‌علیه و نزدیک شدن آن به صفر، خارج‌قسمت بزرگ‌تر شده و در صفر ناپدید می‌شود.

الف) این ناپدید شدن را توضیح دهید.

ب) آیا این ناپدید شدن به معنای «بی‌نهایت بودن پاسخ» است یا «عدم وجود پاسخ»؟ دلیل خود را بیان کنید.

۴. الف)حاصل عبارت $\frac{1}{x}$ را هنگامی که مقدار x به صفر نزدیک می شود به چه صورت تغییر می کند؟

ب) توضیح دهید. زمانی که x دقیقا برابر صفر شود حاصل این عبارت مقدار مشخصی است؟چرا؟

۵. فردی ادعا می کند:

"چون صفر یعنی هیچ، پس تقسیم بر صفر هم باید صفر شود."

این استدلال را نقد کنید.

شیوه نمره‌دهی

هر سؤال از ۰ تا ۲ نمره (حداکثر نمره هر آزمون: ۱۰).