دو فصلنامهٔ نظریه و عمل در برنامهٔ درسی
سال دوازدهم، شمارهٔ ۲۳بهار و تابستان ۱۴۰۳ ، ۲۴۲-۲۱۵

Journal of Theory & Practice in Curriculum
Vol.۲۳ (۱۲); ۲۰۲۴, ۲۱۵-۲۴۲

استفاده از مسائل باز پاسخ برای ارتقای مهارت‌های مدل سازی ریاضی دانش آموزان: بیمارستان را کجا بسازیم؟[۱]

Using Open-ended Problems to enhance Students' Mathematical Modeling Skills: Where Should we Build the Hospital?

مجتبی اسدی[۲]،رضاحیدری قزلجه[۳]

چکیده: در این مقاله، تأثیر تدریس ریاضی با رویکرد حل مسائل بازپاسخ بر ارتقای مهارت‌های مدل‌سازی ریاضی دانش‌آموزان بررسی شد و روش پژوهش، شبه‌آزمایشی با دو گروه آزمایش و گواه بود. نمونه مورد مطالعه، ۶۴ نفر از دانش‌آموزان پایه هشتم یک مدرسه در استان البرز در سال تحصیلی ۱۴۰۲-۱۴۰۱ بود که نویسنده اول، معلم ریاضی آنها بود. براساس نمرات ریاضی نوبت اول که پیش-آزمون محسوب شد، دانش‌آموزان به‌طور تصادفی در دوکلاس ۳۲ نفری همگن به‌عنوان گروه آزمایش و گروه گواه قرارگرفتند. اجرایَ پژوهش در پایان سال‌تحصیلی و پس از اتمام کتاب درسی بود. در انتخاب مسئله‌ها، از محتوای تمام کتاب استفاده شد. دانش‌آموزان گروه آزمایش، در پنج‌جلسه با رویکرد حل مسائل بازپاسخ مبتنی بر چارچوب مونرو (۲۰۱۵) شرکت کردند و دانش‌آموزان گروه گواه، در پنج‌جلسه، به حل مسائل معمولی ریاضی پرداختند. ابزار جمع‌آوری داده‌ها در پس‌آزمون، یک مسئله مدل‌سازی بود. برای تجزیه و تحلیل راه‌حل‌های دانش‌آموزان، از چرخه اصلاح شده مدل‌سازی بلوم (۲۰۱۱) استفاده شد. نتایج نشان داد که دانش‌آموزانی که تجربه حل مسائل بازپاسخ را کسب کردند، عملکرد بهتری در حل مسئله مدل‌سازی داشتند و راهبردهای متنوع‌تر و خلاقانه‌تری را به‌کار بردند. نتیجه‌گیری این پژوهش این است که مسائل بازپاسخ، نقش مؤثری در ارتقای مهارت‌های مدل‌سازی ریاضی دانش‌آموزان پایه هشتم دارند.

واژگان کلیدی: مسائل بازپاسخ، حل مسئله ریاضی، مدل‌سازی ریاضی، دانش‌آموزان پایه هشتم، چرخه اصلاح شده مدل‌سازی بلوم.

M. Asadi, R. Heydari Ghezeljeh

Abstract: The purpose of this research was to investigate the impact of teaching mathematics through open-ended problems on enhancing students' mathematical modeling skills. The study was conducted using a quasi-experimental method, with two experimental and control groups. The sample included ٦٤ Grade ٨ students in one of the cities of Alborz province during the ٢٠٢٢-٢٠٢٣ academic year. The students were divided into two homogenious classes of ٣٢, based on their first mathematics exam scores as pre-test. The research conducted at the end of school year and after the curriculum was covered fully. The experimental group participated in five sessions using open-ended problems that required mathematical modeling skills. The control group received five sessions of solving routine mathematics problems. The data collected at the post-test via a mathematical modeling problem. Students' solutions were evaluated based on Blum's (٢٠١١) modified modeling cycle. The results showed that students who worked on open-ended problems that required modelling skills, performed better and employed more creative strategies in solving the post-test mathematics problem. Thus the research concludes that open-ended problems could contribute to enhancing the Grade ٨ students' mathematical problem-solving and their modeling skills.

Keywords: Open-ended problems, Mathematical problem-solving, Mathematical Modeling, Grade ٨ Students, Bloom's Modified Modeling Cycle.

---

۱. تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۳/۰۵/۱۸، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۶/۱۲
۲. کارشناسی ارشد آموزش ریاضی ، دانشگاه فرهنگیان ، کرج، ایران. رایانامه: mojtaba۴۷۳۴@gmail.com
۳. استادیار گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان،تهران، ایران(نویسنده مسئول). رایانامه: reza.heidari.gh@gmail.com

مقدمه

رویکرد تدریس ریاضی مبتنی بر حل مسائل بازپاسخ، از جنبه‌های مختلف مورد بررسی واقع شده است. دامایانتی[۱] و سوماردی[۲] (۲۰۱۸) به سه دلیل، این رویکرد را در یادگیری ریاضی مؤثر می‌دانند:

۱) مسائل بازپاسخ، اجازه پیمودن مسیر حل مسئله را به کمک روش‌های مختلف، می‌دهد.

۲) برای هر مسئله، پاسخ‌های متعدد و درستی وجود دارد.

۳) زمانی که دانش‌آموزان، حل یک مسئله را به پایان می‌رسانند، می‌توانند به طرح مسئله جدیدی مرتبط با مسئله قبلی، بپردازند.

منظور از مسائل بازپاسخ، مسائلی هستند که دارای راه حل‌های متنوع و همچنین تعداد زیادی پاسخ صحیح باشند. اولین تحقیقات در مورد مسائل بازپاسخ توسط شیمادا[۳] (۱۹۷۷) انجام گرفت و «رویکرد بازپاسخ[۴]» نامیده شد. برخلاف کلاس‌های معمول ریاضی که اغلب، فقط دانش‌آموزان قوی برای پاسخگویی به سؤالات معلم داوطلب می‌شوند و به ارائه نظر می‌پردازند، در کلاس‌های مبتنی بر رویکرد حل مسائل بازپاسخ، تعامل در کلاس شکل می‌گیرد و معمولاً دانش‌آموزان متوسط و ضعیف هم وارد بحث‌های کلاسی می‌شوند (ویتمن، ۲۰۲۱).

ازطرف دیگر، دان و مارشمن[۵] (۲۰۲۰) معتقدند که معلمان ریاضی، اغلب مشتاق یافتن راه‌هایی برای نشان دادن ارتباط بین ریاضی و دنیای واقعی به دانش‌آموزان هستند و یکی از راه‌های انجام این کار را، آموزش مدل‌سازی

---

۱ Damayanti
۲ Sumardi
۳ Shimada
٤ Open Ended Approach
٥ Dunn & Marshman

ریاضی با استفاده از مسائل دنیای واقعی می‌دانند. این درحالی است که مشاهده ضعف دانش‌آموزان در مدل‌سازی ریاضی پدیده‌های واقعی، محققان و سیاستگزاران آموزشی کشورهای مختلف را بر آن داشته است تا توجه بیشتری بر تقویت این مهارت اساسی داشته باشند (عباسیان و همکاران، ۲۰۲۰). در ایران نیز در «سند برنامه درسی جمهوری اسلامی ایران» در بخش حوزه تربیت و یادگیری ریاضیات، بر اهمیت کسب مهارت دانش‌آموزان در مدل‌سازی ریاضی و حل مسائل دنیای واقعی تأکید شده است (دبیرخانه شورای عالی آموزش و پرورش، ۱۳۹۱). در این راستا، استیلمن[۱] و همکاران (۲۰۱۵) بر این باورند که محتوای کتاب‌های درسی می‌توانند از طریق طرح سؤال‌های چالشی و تکالیفی که ارائه می‌کنند، به توسعه توانایی‌ها و مهارت‌های حل مسئله و مدل‌سازی دانش‌آموزان کمک کنند. درصورتی که تعداد بسیار کمی از کتاب‌های درسی، از داده‌های واقعی استفاده می‌کنند و بسیاری از کتاب‌های درسی هم که از داده‌های واقعی استفاده می‌کنند، به مثال‌های دم‌دستی و ساختگی مانند رابطه بین قد دانش‌آموز و طول مو می‌پردازند (بارنز[۲] و همکاران، ۲۰۱۶).

اگرچه مدل‌سازی ریاضی در چند دهه گذشته مورد توجه بوده، اما اخیراً محبوبیتی بیش از پیش در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای به دست آورده است و در برنامه درسی هسته مشترک[۳]، مدل‌سازی ریاضی به عنوان یکی از هشت استاندارد اساسی شناخته شده است (پورتر[۴] و همکاران، ۲۰۱۱). انگلیش[۵] و سریرامن (۲۰۱۰) هم ادعا می‌کنند که هر چه بیشتر بتوانیم مسائل دنیای واقعی را

---

۱ Stillman
۲ Barnes
۳ Common Core State Standards
۴ Porter
۵ English

در برنامه درسی ریاضی مدارس بگنجانیم، شانس ما برای ارتقای انگیزه دانش‌آموزان و بهبود مهارت‌های حل مسئله آنها، بیشتر می‌شود.

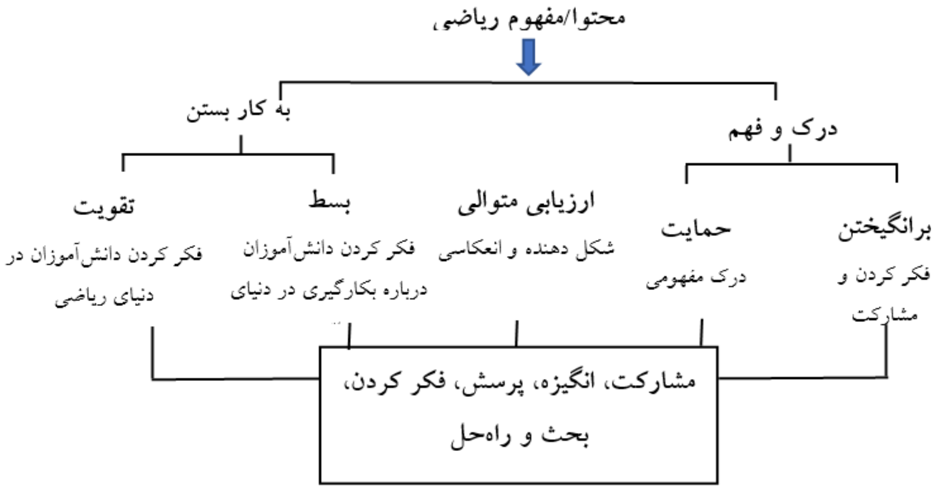
بیان مسئله و چارچوب نظری

مونرو[۱] (۲۰۱۵) چارچوبی برای تدریس با رویکرد حل مسائل بازپاسخ ارائه داده است که «چارچوب رویکرد باز[۲]» نامیده می‌شود و از دو بخش اصلی «درک و فهم ریاضی» و «کاربرد ریاضی» تشکیل شده است. بخش درک ریاضی خود به دو بخش « برانگیختن[۳]» و «حمایت[۴]» تقسیم می‌شود. برانگیختن به ارائه اطلاعات از جانب دانش‌آموزان مربوط می‌شود و حمایت به نحوه ارائه راهنمایی معلم به دانش‌آموزان برای توضیح روش‌ها یا راه‌حل‌های خودشان اشاره دارد. کاربرد ریاضی نیز به دو بخش «بسط[۵]» و «تقویت[۶]» اطلاق می‌شود که منظور از بسط این است که چگونه معلم، دانش‌آموزان را راهنمایی می‌کند تا مفهومِ آموخته شده را در دنیای واقعی به‌کار ببرند و تقویت، اشاره به تعمیق درک دانش‌آموزان در دنیای ریاضی دارد. معلمان بازخورد مستمری را به دانش‌آموزان ارائه می‌کنند و آنها را تشویق می‌کنند که یادگیری خود را ارزیابی کنند. این امر زمانی مشاهده می‌شود که معلمان از دانش‌آموزان در فهم و به‌کارگیری دانش خود حمایت می‌کنند. به همین دلیل، مقوله **ارزیابی متوالی** هم معنادار می‌شود. کلمه «متوالی[۷]» به معنای ارزیابی مداوم پاسخ‌های دانش‌آموزان و بازطراحی

---

[۱] Munroe
[۲] The Open Approach (OPA) Framework
[۳] Stimulate
[۴] Support
[۵] Stretch
[۶] Strengthen
[۷] Successively

تدریسِ انجام شده توسط معلمان است. یک نمایش تصویری از این چرخه در شکل ۱ نشان داده شده است (مونرو، ۲۰۱۵).



شکل ۱: چارچوب مونرو (۲۰۱۵) برای تدریس ریاضی با رویکرد حل مسائل بازپاسخ

فتاح[1] و همکاران (۲۰۱۶) به بررسی استفاده از رویکرد مسائل باز پاسخ در پرورش توانایی تفکر خلاق ریاضی و عزت نفس دانش‌آموزان دبیرستانی در ریاضی پرداختند. آنها در پژوهش نیمه تجربی خود از آزمون توانایی تفکر خلاق ریاضی و عزت نفس به‌عنوان ابزار استفاده کردند. نتایج پژوهش آنان نشان داد که توانایی تفکر خلاق ریاضی و دانش‌آموزانی که با رویکرد مسائل باز پاسخ آموزش دیدند، در مقایسه با دانش‌آموزانی است که به‌طور معمول

[1] Fatah

آموزش دیده بودند، بهبود بیشتری داشته و سطح عزت نفس آنها نیز بالاتر رفته بود.

ازطرف دیگر، خلاقیت به عنوان یکی از مهارت‌های ضروری قرن بیست و یکم برای موفقیت فردی و اجتماعی حیاتی است (بگتو و سریرامان[۱]، ۲۰۱۷). ازنظر تان[۲] و سریرامان (۲۰۱۷)، خلاقیت را می‌توان به عنوان تلاقی تفکر واگرا و تفکر همگرا درنظر گرفت و حل مسائل بازپاسخ ریاضی، تفکر واگرا را که یکی از مؤلفه‌های خلاقیت است، پرورش می‌دهد (کاون[۳]و همکاران، ۲۰۰۶). بنابراین در برنامه درسی ریاضی مدرسه‌ای، توجه به مؤلفه‌های تفکر واگرا از طریق ریاضی، از اهمیت خاصی برخوردار است.

علاوه براین بر اساس تعریف یونسکو، مهارت‌های تفکر خلاق ریاضی یکی از چهار مهارتی است که هر فرد علاوه بر داشتن مهارت‌های تفکر انتقادی، حل مسئله، برقراری ارتباط و مشارکت با دیگران، لازم است از آن برخوردار باشد. بدین سبب برای تربیت افراد خلاق، این مهارت‌ها در اهداف یادگیری گنجانده می‌شود، اهدافی که لازم است به آنها دست یافت تا بازیگران عرصه آموزش از جمله معلمان، به سمت ساخت مواد آموزشی متنوع با رویکردهای مختلف هدایت شوند (سونجایا و یولیانتو[۴]، ۲۰۲۲).

همچنین، مسائل بازپاسخ فرصت مناسبی برای بروز خلاقیت با تعبیر گیلفورد[۵] (۱۹۶۷)، در دانش‌آموزان ایجاد می‌کند. ازنظر گیلفورد، خلاقیت مجموعه ای از ویژگی‌ها و توانایی‌های فردی است که نیازمند تفکر واگرا و گاهی معادل آن یا نتیجه آن است. گیلفورد برای شناسایی تفکر واگرا سه

---

[۱] Beghetto & Sriraman
[۲] Tan
[۳] Kwon
[۴] Sonjaya & Yulianto
[۵] Guilford, J. P.

شاخص عمده را پیشنهاد داد که شامل «روانی یا سیالی» به معنای تعدد ایده‌ها و راه حل‌های پیشنهادی، «انعطاف پذیری» یعنی درصورت تغییر شکل و یا مطرح شدن چیزی از بعد دیگر، فرد قدرت و توانایی لازم را برای تغییر جهت فکری خود داشته باشد و بالاخره مقصوداز «اصالت فکر»، ابتکارِ مبتنی بر ارائه جواب‌های غیرمعمول[۱]، شگفتی‌آور و داهیانه به مسائل است.

افزون براین، بعضی از محققان خلاقیت را به‌عنوان یک توانایی خاص در یک حوزه یادگیری درنظر می‌گیرند، درحالی که بسیاری از معلمان، دانش و تجربه کافی را در طراحی یا اصلاح تکلیف برای آموزش خلاقیت، ندارند (هرشکویتز[۲] و همکاران، ۲۰۱۷) و فقدان آگاهی نسبت به خلاقیت در بین آنها، مشهود است (بگتو و سریرامان، ۲۰۱۷). در واقع، شیوه تدریس در اغلب کلاس‌های درس ریاضی به گونه‌ای است که کمتر به تقویت مهارت‌های بحث شده که برای دانش‌آموزان ضروری است مانند مهارت‌های ارتباطی، تفکر انتقادی و تفکر خلاق توجه می‌شود.

علاوه بر این، تناقضاتی در اهداف تدریسیِ معلم با اهداف آموزشیِ خلاقیت- محور وجود دارد (بگتو و سریرامان، ۲۰۱۷)، زیرا معلمان تا حدود زیادی به مواد درسی یا کتاب‌های درسی رسمی در کلاس‌های خود وابسته هستند و به‌این دلیل، فرصت اصلاح تکلیف‌های کتاب‌های درسی را ندارند (پالسدوتر[۳] و سریرامان، ۲۰۱۷).

دامایانتی و سومارتی (۲۰۱۸) در تحقیق خود باعنوان «توانایی تفکر خلاق ریاضی دانش‌آموزان دوره اول متوسطه در حل مسائل باز[۴]»، به توصیف توانایی

---

[۱] Non-routine Problems
[۲] Hershkowitz
[۳] Palsdottir
[۴] Mathematical Creative Thinking Ability of Junior High School Students in Solving Open-Ended Problems

تفکر خلاق ریاضی در جنبه‌های روانی، انعطاف‌پذیری و اصالت که گیلفورد بیان کرده پرداختند و برای این کار، از مسئله‌های باز معادلات خطی یک متغیره[۱] استفاده کردند. شرکت‌کنندگان در تحقیق آنها، دانش‌آموزان پایه هفتم یک دبیرستان خصوصی[۲] بودند. داده‌ها با استفاده از آزمون و مصاحبه جمع‌آوری شد. نتیجه این تحقیق نشان داد که جنبه روانی مثبت، حاصل از توانایی دانش‌آموزان در ذکر امکان وجود پاسخ‌های متعدد است. سپس جنبه انعطاف‌پذیری نشان داد که دانش‌آموزان از روش‌های مختلف برای حل مسئله یا حداقل استفاده از روش حل مناسب استفاده می‌کنند. جنبه اصالت به ارائه جواب‌های منحصربه‌فرد دانش‌آموزان مربوط می‌شد.

بینگولبالی[۳] و همکاران (۲۰۲۰) به بررسی محتوای کتاب‌های درسی ریاضی از منظر تفکر همگرا و تفکر واگرا پرداختند و به این نتیجه رسیدند که کتاب‌های درسی می‌توانند فرصت‌هایی را برای تفکر واگرا و همگرا فراهم کنند. دوینک[۴] و همکاران (۲۰۲۲) نیز در پژوهشی تحت عنوان «خلاقیت در عملکرد ریاضی: نقش تفکر واگرا و همگرا[۵]» دریافتند که عملکرد ریاضی کودکان عمدتاً برتفکر همگرا متکی است، درصورتی که نقش تفکر واگرا نیز از دو جنبه مهم است: اولاً تکمیل کننده تفکر همگرا در تکلیف‌های چندراه‌حلی است و ثانیاً جبران کننده کمبود تفکر همگرا در تکلیف‌های تک‌راه‌حلی می باشد.

---

[۱] به این معادلات، معادلات درجه اول یک مجهولی هم می‌گویند که شکل عمومی آنها به صورت $ax+b=0$ است و در آن a و b اعداد ثابتی می‌باشند(a مخالف صفر و x هم مجهول است). پاسخ چنین معادله ای برابر با منفی b تقسیم بر a است.

[۲] Private School

[۳] Bingolbali

[۴] De Vink

[۵] Creativity in Mathematics Performance: The Role of Divergent and Convergent Thinking

توسعه فعالیت مدل‌سازی با یک موقعیت اولیه در جهان واقعی شروع می‌شود و با یک وضعیت نهایی که پاسخی به مسئله شناسایی‌شده در موقعیت اولیه است، به پایان می‌رسد (آلمیدا و سیلوا[1]، ۲۰۱۵). حل مسائل مدل‌سازی ریاضی مستلزم بهره‌مند بودن از توانایی‌ها و شایستگی‌های مختلفی است که تفکر واگرا یکی از آنهاست. تفکر واگرا موجب می‌شود که فرد در مواجهه با مسائل مدل‌سازی، به راه‌حل‌های متعدد فکر کند و خود را الزاماً محصور به چارچوبی خاص نکند. در فرآیند مدل‌سازی ریاضی، تفکر واگرا به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا بتوانند به ارزیابی انتقادی مدل‌هایی که ساخته‌اند، بپردازند (براون[2] و ایکیدا، ۲۰۱۵).

یکی از راه‌های مقدماتی برای ارتقای مهارت‌های مدل‌سازی دانش‌آموزان، ارائه مسائل معمولی[3] با داده‌های واقعی است که برای این کار، ابزارهایی مانند ماشین‌حساب‌های نموداری و نرم‌افزارهایی نظیر اکسل، می‌توانند به دانش‌آموزان کمک کنند تا مدل‌های ریاضی را برای مسئله‌های واقعی که ناهموارند و نیازمند محاسبات پیچیده هستند، تدوین کنند (سوآرس[4]، ۲۰۱۵). از طرف دیگر، دانش‌آموزان می‌توانند داده‌های خود را جمع‌آوری کنند یا داده‌های شبیه‌سازی‌شده را از موقعیت‌های چالش‌برانگیزتر و جالب‌تر و بر اساس شبیه‌سازی کامپیوتری، به‌دست آورند (هوینه[5] و همکاران، ۲۰۱۶). ازاین گذشته، توانایی اجرای مراحل مدل‌سازی نیازمند صلاحیت یا زیرصلاحیت‌های خاصی مانند توانایی درک یک موقعیت در دنیای واقعی یا توانایی تفسیر نتایج ریاضی

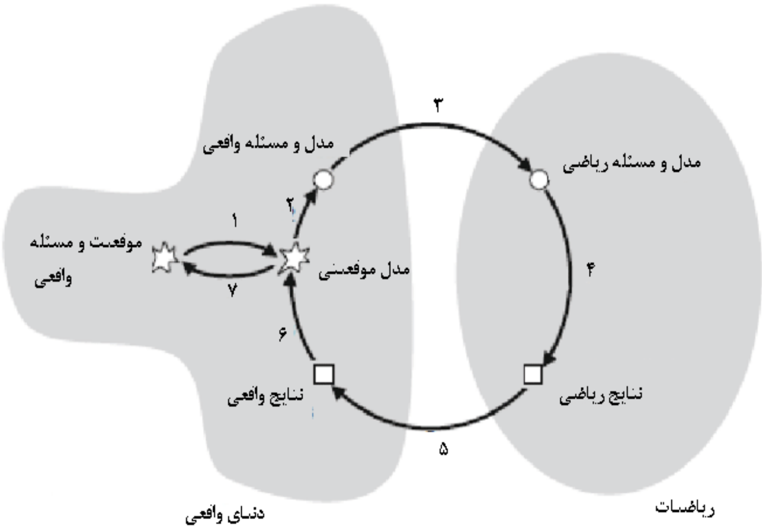
---

۱ Almeida & Silva
۲ Brown
۳ Routine Problems
۴ Soares
۵ Huynh

مربوط به یک وضعیت در دنیای واقعی است (ایکیدا، ۲۰۱۵). معلمان نیز برای تدریس موفقیت‌آمیز ریاضی، به صلاحیت‌های متعددی نیازمندند (بلوم، ۲۰۱۵).

چرخه مدل‌سازی بلوم

تاکنون چارچوب‌های مختلفی برای مدل‌سازی ریاضی ارائه شده‌اند. یکی از رایج‌ترین چارچوب‌هایی که در تحقیقات مربوط به مدل‌سازی از آن استفاده می‌شود، چرخه بلوم (۲۰۱۱) است که مدل توسعه‌یافته بلوم و لیس[1] (۲۰۰۷) است و در شکل ۲ آمده است.



شکل ۲: چرخه مدل‌سازی بلوم (۲۰۱۱)

چرخه مدل‌سازی بلوم (۲۰۱۱) دارای هفت گام (مرحله) است:

گام اول (*فهمیدن و ساختن*): ساختن مدلی ذهنی از موقعیت دنیای واقعی

---

[1] Leis

گام دوم (*ساده‌سازی یا خلاصه کردن و ساختاربندی*): ساختاربندی مدل ذهنی با ساده‌سازی داده‌های مسئله

گام سوم (*ریاضی‌سازی*): ساختن یک مدل ریاضی با تبدیل مفاهیم و روابط موجود در مدل به نمادها و روابط ریاضی

گام چهارم (*کارکردن ریاضیاتی*): حل مسئله ریاضی با استفاده از قوانین، روابط و محاسبات ریاضی و تولید برخی نتایج ریاضی

گام پنجم (*تفسیر*): تفسیرِ نتایج ریاضی در دنیای واقعی

گام ششم (*اعتبارسنجی*): بررسی اعتبار و معنادار بودن نتایج ریاضیِ به‌دست آمده در دنیای واقعی

گام هفتم (*ارائه*): نوشتن و توضیح تمام مراحل راه‌حل.

تکین[۱] و باکوا[۲] (۲۰۱۸) شاخص‌هایی را برای ارزیابی پاسخ مسائل مدل‌سازی ریاضی، طبق گام‌های چرخه بلوم (۲۰۱۱) ارائه داده‌اند که در آن، برای هر یک از مراحل هفتگانه چهار سطح تعریف شده است. در پژوهش حاضر، اگر دانش‌آموزی در هر یک از مراحل هفت‌گانه چرخه بلوم (۲۰۱۱) که در سطح چهار قرار گرفته باشد، به منزله آن است که مرحله مورد نظر را با موفقیت گذرانده است.

از این گذشته، آلمیدا (۲۰۱۸) به بررسی این سؤال پرداخت که دانش‌آموزان، چگونه از ریاضیات در فعالیت‌های مدل‌سازی استفاده می‌کنند. او به استناد داده‌های جمع‌آوری شده از فعالیت‌های انجام‌شده توسط دانش‌آموزان پایه‌های

---

[۱] Tekin
[۲] Bukova

اول و چهارم دبیرستان، به این نتیجه رسید که درک موقعیت‌های جهان واقعی منجر به مدل‌سازی می‌شود و موقعیت مدل‌سازی شده به‌عنوان پایه‌ای برای ریاضی‌سازی در هر فعالیت عمل می‌کند و ریاضی‌سازی به‌نوبه خود، به استفاده از مفاهیم، ابزارها و رویه‌های ریاضی متفاوتی منجر می‌شود. علاوه براین، ریاضیاتی که دانش‌آموزان استفاده می‌کنند، ریشه در تجربیات قبلی آن‌ها با مفاهیم و ابزارهای ریاضی و با انواع روش‌های مدل‌سازی ریاضی دارد. همچنین، عبداله‌پور و رفیع‌پور (۱۳۹۶) تحقیقی با عنوان «پدیدارشناسی چرخه مدل‌سازی دانش‌آموزان پایه نهم در حل یک مسئله اصیل» انجام دادند. نتیجه تحقیق آنها بیانگر آن بود که تجربه زیسته دانش‌آموزان به حل مسئله مدل‌سازی کمک می‌کند.

روش پژوهش

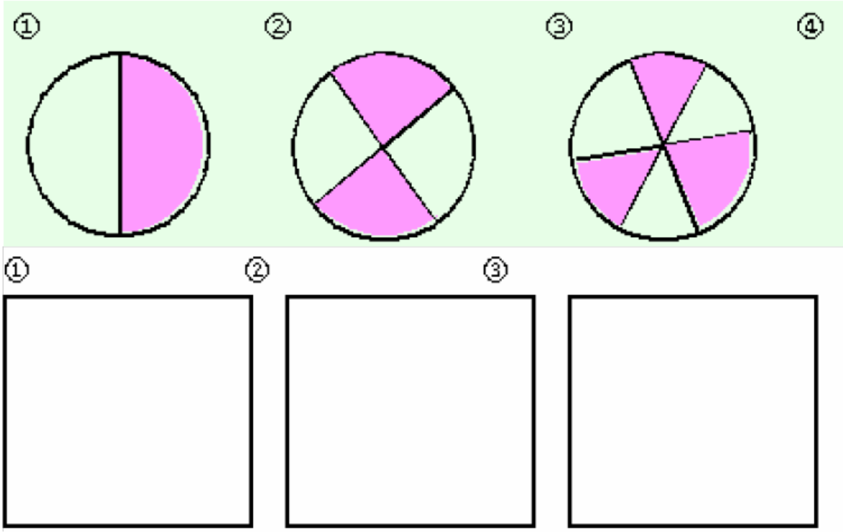
این پژوهش از جهت هدف، کاربردی و از نظر روش، شبه‌آزمایشی است. نمونه پژوهش، ۶۴ دانش‌آموز پایه هشتم یک دبیرستان دولتی در یکی از شهرستان‌های استان البرز بود. برای تقسیم دانش‌آموزان به دو گروه، از نمرات آزمون نوبت اول به‌عنوان پیش–آزمون استفاده شد و براساس آن، دانش‌آموزان در دو کلاس ۳۲ نفری قرارگرفتند. نویسنده اول مقاله، معلم ریاضی هر دو کلاس بود. به تصادف، یکی از کلاس‌ها به عنوان گروه گواه و کلاس دیگر به عنوان گروه آزمایش در نظر گرفته شد. به منظور بررسی همتا بودن سطح علمی دانش‌آموزان دو کلاس، میانگین و واریانس نمرات ریاضی نوبت اول آنان ملاک

واقع شد و پس از اطمینان از همتا بودن دو گروه، به تصادف یکی به‌عنوان گروه گواه و دیگری به‌عنوان گروه آزمایش درنظر گرفته شدند.

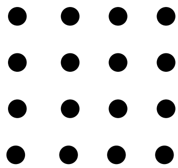
زمان اجرای پژوهش، آخر سال تحصیلی و پس از پوشش دادن کامل کتاب درسی بود. بنابراین تمرکز بر محتوای خاصی از کتاب ریاضی پایه هشتم نبود و از تمام فصل‌های کتاب برای انتخاب مسئله‌ها، استفاده شد. برای گروه آزمایش، پنج جلسه حل مسئله ریاضی با رویکرد حل مسائل بازپاسخ و طبق چارچوب مونرو (۲۰۱۵) اجرا شد. برای گروه گواه نیز پنج جلسه حل مسئله برگزار شد و در آن، دانش‌آموزان به حل مسائل معمولی ریاضی در سطح پایه هشتم پرداختند.

شرکت‌کنندگان در گروه آزمایش، در هر جلسه با تعدادی مسئله بازپاسخ ریاضی مواجه می‌شدند که دانش‌آموزان با مشارکت هم و راهنمایی معلم، آنها را حل می‌کردند. در پایان هر جلسه هم تکلیفی شامل یک مسئله بازپاسخ به آنها محول می‌شد که تا جلسه بعدی، آن را حل کنند و به گروه ارائه دهند. تعدادی از مسائلی که در پنج جلسه مورد استفاده قرار گرفت، در زیر آمده است:

مسئله۱: هر یک از سه مربع داده شده در شکل زیر را طوری به قسمت‌های برابر تقسیم کنید که در هر مورد، مساحت مناطق رنگی و بی‌رنگ برابر شوند؛ همان‌طور که در مثال مربوط به دایره در شکل زیر، این کار انجام شده است (کاون و همکاران،۲۰۰۶).



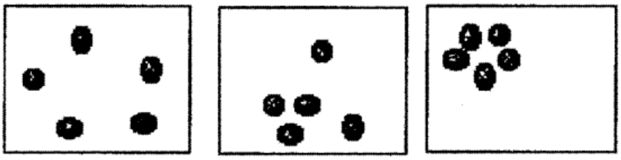
مسئله۲: مطابق شکل زیر، ۱۶ نقطه داده شده‌اند که فاصله افقی و عمودی آنها از هم‌دیگر یک سانتی‌متر است.



با وصل کردن نقطه‌ها به هم، شکل‌هایی بسازید که مساحت هر کدام از آنها ۲ سانتی‌متر مربع گردد. اگر دو شکل با انتقال یا تقارن یا دوران بر هم منطبق شوند، آن دو شکل تکراری محسوب می‌شوند. شکل‌ها نباید چندتکه باشند؛ بلکه باید به صورت یکپارچه و یک تکه باشند (لی[1] و همکاران، ۲۰۰۳).

[1] Lee

مسئله۳: سه دانش‌آموز الف، ب و ج، هر کدام پنج تیله می‌اندازند و مانند شکل‌های زیر، تیله‌های هر یک از آنها روی زمین می‌افتند. در این بازی، برنده شخصی است که تیله‌هایش کمترین پراکندگی را داشته باشد. در شکل‌های زیر، درجه پراکندگی به‌ترتیب از چپ به راست افزایش می‌یابد. به هر طریقی که می‌توانید، راهی برای محاسبه درجه پراکندگی تعیین کنید. (بکر[1] و شیمادا، ۱۹۹۷).

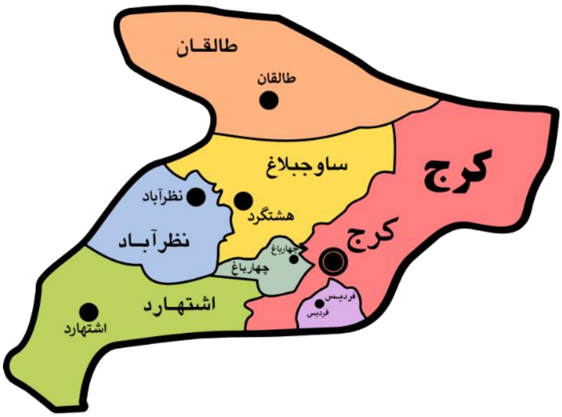


همچنان که بیان شد، برای گروه گواه نیز پنج جلسه برای حل مسائل معمولی ریاضی به روال کلاس‌های مرسوم برگزار شد. پس از پایان پنج جلسه برای هر دوگروه، یک پس-آزمون برگزار شد که شامل دو مسئله مدل‌سازی ریاضی بود. برای حل هر یک از این دو مسئله، ۳۰ دقیقه زمان برای شرکت-کنندگان درنظر گرفته شد. هر مسئله مدل‌سازی بدین صورت ارائه شد که تمام اطلاعات لازم برای حل آن داده نشود، بلکه از دانش‌آموزان خواسته شود تا اطلاعاتی را که فکر می‌کنند برای حل مسئله مورد نظر نیاز است، از پژوهشگر درخواست کنند و پژوهشگر در صورت لزوم با جستجو در اینترنت، اطلاعات درخواست شده را به آنها ارائه دهد. ازاین گذشته، به دانش‌آموزان گفته شد که نتایج این آزمون، تأثیری در نمره مستمر یا پایانی آنها ندارد، اما به‌منظور

[1] Becker

پیشگیری از تقلب و تأثیر آن بر نتایج آزمون، تقلب، نقض قوانین کلاس محسوب شده و مطابق مقررات کلاس، مجاز نیست. در این مقاله، گزارش اجرای یکی از دو مسئله ارائه می‌شود.

مسئله بیمارستان: ساوجبلاغ، نظرآباد و چهارباغ، سه شهر بزرگ در استان البرز هستند. فرض کنید امکانات راه‌اندازی یک بیمارستان مجهز و مدرن برای دسترسی مردم این سه شهر وجود دارد. نقشه زیر، موقعیت این سه شهر و سایر شهرهای استان را نشان می‌دهد. از شما خواسته‌اند تا بهترین موقعیت ممکن را برای تأسیس این بیمارستان، شناسایی کنید. چطور این کار را انجام می‌دهید؟ (این مسئله از مقاله زیبایک و کانر[۱]، ۲۰۰۶ گرفته شده و برای بومی‌سازی، اندکی تغییر در آن داده شده است).



شکل ۳: نقشه استان البرز

[۱] Zbiek & Conner

چرخه بلوم (۲۰۱۱)، یکی از الگوهای شناخته شده مدل‌سازی ریاضی است که پژوهش‌های متعددی به آن ارجاع داده شده‌اند. به‌همین سبب در تحقیق حاضر، از این چرخه برای ارزیابی پاسخ‌های دانش‌آموزان استفاده شده است.

یافته‌ها

بعد از مشخص شدن دو گروه گواه و آزمایش، همسان بودن دو گروه بررسی شد. برای این منظور، از نمرات نوبت اول دو گروه استفاده شد و با توجه به این که تعداد نمونه بیشتر از ۳۰ بود، از آزمون پارامتریک لون، استفاده شد[1] که نتیجه آن در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱: بررسی همسانی واریانس نمرات نوبت اول دو گروه گواه و آزمایش بر اساس آزمون لون

متغیر	آماره لوین (F فیشر)	درجه آزادی اول	درجه آزادی دوم	سطح معناداری
نمرات نوبت اول دانش آموزان	۰.۸۴۱	۱	۶۲	۰.۳۶۳

در آزمون لون، فرض صفر برابری واریانس‌های دو گروه است. با توجه به این که در جدول ۱ سطح معناداری ۳۶۳/. به‌دست آمد که بیشتر از ۰/۰۵ است، فرض آزمون که برابری واریانس دو گروه گواه و آزمایش است،

[1] برای تجزیه و تحلیل داده‌ها، از نسخه ۲۶ نرم‌افزار SPSS استفاده شد.

تأیید شد و نشان داد که برای استفاده از آزمون t با فرض برابری واریانس دو گروه، مانعی وجود ندارد.

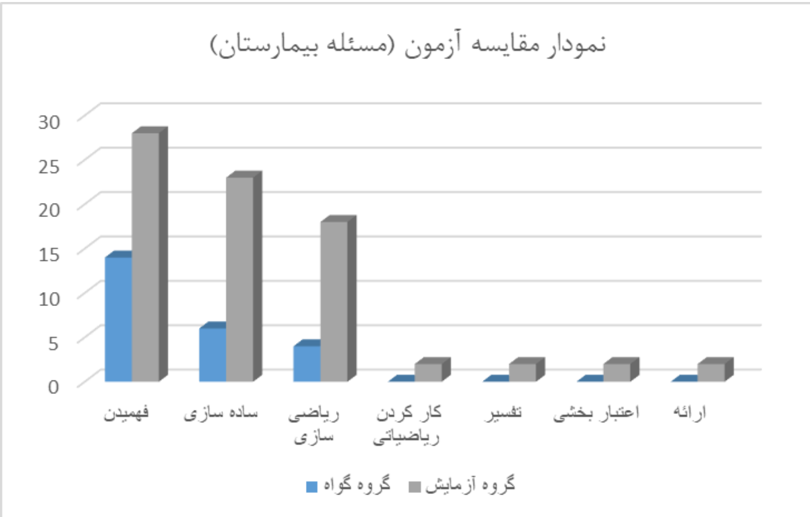
جدول ۲: همسانی میانگین نمرات نوبت اول دو گروه گواه و آزمایش بر اساس آزمون t (با فرض برابری واریانس دو گروه)

متغیر	t	درجه آزادی	سطح معناداری (دو دامنه)	اختلاف میانگین	اختلاف خطای استاندارد	بازه اطمینان ۹۵٪ اختلاف	
						پایین	بالا
نمرات نوبت اول دانش آموزان	۰.۱۰۷	۶۲	۰.۹۱۵	۰.۱۲۵	۱.۱۶۵	-۲.۲۰۴	۲.۴۵۴

با توجه به سطح معناداری ۰,۹۱۵ در جدول ۲، اختلاف معناداری بین میانگین دو گروه گواه و آزمایش مشاهده نشد. این درحالی است که اعضای هیچ کدام از دو گروه آزمایش و گواه، آموزشی در زمینه حل مسائل مدل‌سازی ندیده بودند. تنها اختلاف در این بود که اعضای گروه آزمایش، روی مسائل بازپاسخ کار کردند، درصورتی که اعضای گروه گواه، درگیر حل مسائل معمولی و مشابه با مسائل کلاسی شدند. بعد از برگزاری پس–آزمون با یک مسئله مدل‌سازی، راه حل‌های شرکت‌کنندگان مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت تا مشخص شود که هر دانش‌آموز، تا کدام مرحله از مراحل هفتگانه چرخه بلوم (۲۰۱۱)، پیش رفته است. نتایج در جدول ۳ و نمودار ۱ قابل مشاهده است.

جدول ۳: تعداد و درصد دانش‌آموزانی که مراحل مختلف چرخه بلوم (۲۰۱۱)
را در حل مسئله «بیمارستان» با موفقیت طی کرده‌اند

	مرحله	فهمیدن	ساده سازی	ریاضی سازی	کار کردن ریاضیاتی	تفسیر	اعتبار بخشی	ارائه
گروه گواه	فراوانی	۱۴	۶	۴	۰	۰	۰	۰
	درصد	۴۳٫۷۵	۱۸٫۷۵	۱۲٫۵	۰	۰	۰	۰
گروه آزمایش	فراوانی	۲۸	۲۳	۱۸	۲	۲	۲	۲
	درصد	۸۷٫۵	۷۱٫۸۷۵	۵۶٫۲۵	۶٫۲۵	۶٫۲۵	۶٫۲۵	۶٫۲۵



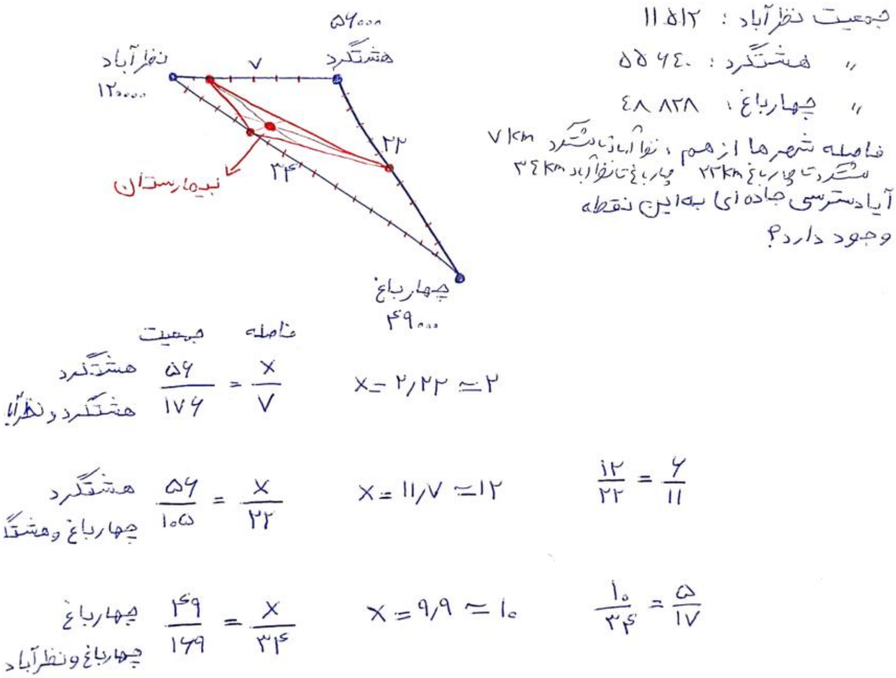
نمودار ۱: تعداد دانش‌آموزانی که مراحل مختلف چرخه بلوم (۲۰۱۱) را در حل
مسئله «بیمارستان» با موفقیت طی کرده‌اند

طبق طراحیِ پژوهش، از دانش‌آموزان خواسته شده بود تا اطلاعات مورد نیازشان را برای حل مسئله، از معلم/پژوهشگر درخواست نمایند. سؤالات و اطلاعات درخواستی دانش‌آموزان از معلم/پژوهشگر برای حل مسئله، حاوی نکات مهمی بود که دسته‌بندی شدند که در جدول ۴ ارائه می‌شود.

جدول ۴: فراوانی اطلاعات درخواستی دانش‌آموزان برای حل مسئله «بیمارستان»

اطلاعات درخواست شده	فاصله طولی	جمعیت	مساحت	کرایه تاکسی	دسترسی	آب و هوا	سایر شهرها	فاسله زمانی	امکانات درمانی شهرها
فراوانی گروه گواه	۱۲	۸	۰	۵	۰	۳	۰	۰	۲
فراوانی گروه آزمایش	۱۸	۱۵	۱	۰	۳	۱	۲	۱	۴

اغلب دانش‌آموزان برای حل این مسئله، مرکز سه شهرستان را به هم وصل کرده بودند. در مثلث ایجاد شده حدس زدند که محل احداث بیمارستان، باید در جایی درون این مثلث باشد. در پاسخ‌های مختلف دانش‌آموزان، محل مناسب درون مثلث، محل برخورد میانه‌ها، ارتفاع‌ها یا نیمسازها بود. بیشتر آنها اطلاعاتی را در مورد جمعیت یا مساحت شهرستان‌ها از پژوهشگر درخواست نکردند و در صورت کسب اطلاعات، به‌جز دونفر از گروه آزمایش، بقیه نتوانستند از اطلاعات جمعیت شهرستان‌ها، برای حل این مسئله بهره ببرند. در تحلیل راه حل یکی از این دو نفر که در زیر آمده است، مشخص شد که این دانش‌آموز، تا آخرین گام (مرحله)، یعنی گام ارائه از هفت گام چرخه بلوم (۲۰۱۱)، پیش رفته بود.



شکل ۴: پاسخ یکی از دانش‌آموزان به مسئله بیمارستان

بحث و نتیجه‌گیری

هدف اصلی پژوهش حاضر این بود که چگونگیِ تأثیر تدریس ریاضی با رویکرد حل مسائل بازپاسخ را بر توانایی مدل‌سازی ریاضی دانش‌آموزان پایهٔ هشتم بررسی کند. در این پژوهش، هیچ یک از دو گروه آزمایش و گروه گواه، مستقیماً برای حل مسائل مدل‌سازی ریاضی آموزش ندیدند. اعضای گروه آزمایش در زمینه حل مسائل باز پاسخ ریاضی، حین درگیرشدن با مسئله‌ها و حل آنها، آموزش‌هایی ضمنی دریافت کردند. به‌طور موازی و در همان تعداد جلسات، گروه گواه به حل مسئله‌های معمولی ریاضی که با مشابه آنها درطول

سال تحصیلی مواجه شده بودند، مشغول بودند. در پس‌آزمون، یک مسئله مدل‌سازی با عنوان «مسئله بیمارستان» به هر دو گروه ارائه شد. عملکرد گروه آزمایش، بهتر از گروه گواه بود و اختلاف معناداری بین عملکرد دو گروه مشاهده شد.

نتایج به‌دست آمده حاکی از آن است که تفاوت معناداری بین نمرات پس‌آزمون گروه گواه و گروه آزمایش وجود دارد و نشان‌دهنده آن است که مداخله آموزشیِ اتخاذ رویکرد مسئله بازپاسخ در تدریس ریاضی، باعث ارتقای توانایی‌های مدل‌سازی و حل مسئله دانش‌آموزان شده است. پژوهش حاضر نشان داد که رویکرد تدریس ریاضی با مسائل باز پاسخ و منطبق بر هفت گام چارچوب مدل‌سازی ریاضی بلوم (۲۰۱۱)، موجب بهبود عملکرد دانش‌آموزان می‌شود. این هفت گام شامل فهم مسائل مدل‌سازی ریاضی، ساده‌سازی این مسائل، ریاضی‌وار کردن مسائل روزمره، استفاده از ابزارهای ریاضی، تفسیر نتایج، اعتباربخشی و ارائه نتایج است که در طراحی مسئله بیمارستان، درنظر گرفته شدند. این یافته، همسو با نتایج تحقیق سلیمیان و همکاران (۱۳۹۸) است که در آن، این پژوهشگران به این نتیجه رسیدند که آموزش مبتنی بر حل مسائل باز پاسخ، بر توانایی حل مسئله دانش‌آموزان پایه هفتم تاثیر مثبت دارد. همچنین، یافته‌های این پژوهش، تأییدکننده یافته‌های پژوهش سونجایا و یولیانتو[۱] (۲۰۲۲) است که درآن، این دو پژوهشگر به دنبال درک تغییرات مرتبط با مهارت‌های تفکر خلاق ریاضی دانش‌آموزان دوره ابتدایی در اثر انتخاب رویکرد باز هنگام تدریس بودند. نتایج پژوهش آنها حاکی از افزایش مهارت‌های تفکر خلاق دانش‌آموزان با به‌کارگیری رویکرد باز بود.

[۱] Sonjaya & Yuliyanto

با توجه به نتایج این پژوهش، پیشنهاد می‌شود که از رویکرد حل مسائل بازپاسخ برای ارتقای توانایی‌های مدل‌سازی و حل مسئله ریاضی دانش‌آموزان در بازنگریِ برنامه درسی و کتاب‌های درسی ریاضی این دوره و در تدریس ریاضی، استفاده شود. این پژوهش نشان داد که به‌کارگیری اثربخش این رویکرد، مستلزم ایجاد شرایطی است که به چند مورد مهم، اشاره می‌شود:

- محیط یادگیری تعاملی برای مشارکت کردن دانش‌آموزان در کلاس
- مشارکت دانش‌آموزان با یک‌دیگر در قالب گروه‌های کوچک
- تشویق شدن دانش‌آموزان به تفکر خلاق و انعطاف‌پذیری به‌سبب بازپاسخ بودن مسئله‌ها و تنوع راه‌حل‌ها
- مدل‌سازی مسائل واقعی و چالش‌برانگیز
- ارائه بازخورد سازنده توسط معلم در ضمن مشارکت‌های گروهی و کلاسی.

منابع

سلیمیان، فاطمه؛ ریحانی، ابراهیم؛ بهرامی سامانی، احسان. (۱۳۹۸). بررسی تأثیر آموزش مبتنی بر حل مسائل بازپاسخ بر توانایی حل مسئله دانش‌آموزان پایه هفتم، *نشریه علمی پژوهش‌های آموزش و یادگیری*، دوره ۱۶، شماره ۲، پیاپی ۳۰، پاییز و زمستان ۱۳۹۸، صص. ۱۳ تا ۲۷. دانشگاه شاهد.

شورای عالی آموزش و پرورش. (۱۳۹۱). *برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران*. وزارت آموزش و پرورش.

عبداله‌پور، کاظم؛ رفیع‌پور، ابوالفضل. (۱۳۹۶). پدیدارشناسی چرخهٔ مدل‌سازی دانش‌آموزان پایه نهم در حل یک مسئله اصیل، *نشریه فناوری آموزش*، جلد ۱۱ شماره ۳. بهار ۱۳۹۶. دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

Abassian, A., Safi, F., Bush, S., & Bostic, J. (۲۰۲۰). Five different perspectives on mathematical modeling in mathematics education. *Investigations in Mathematics Learning*, ۱۲(۱), ۵۳-٦۵. Taylor & Francis Online.

Almeida, L. M. W. & Silva, H. C. (۲۰۱۵). A matematização em atividades de modelagem matemática. (The mathematization in mathematical modeling activities.). Alexandria, ۸(۳), ۲۰۷–۲۲۷.

Almeida, L. M. W. (۲۰۱۸), Considerations on the use of mathematics in modeling activities. ZDM Mathematics Education. ۵۰, ۱۹–۳۰. Springer. https://doi.org/۱۰,۱۰۰۷/s۱۱۸۵۸-۰۱۷-۰۹۰۲-٤

Barnes, M., Nolan, J. & Phillips, G. (۲۰۱٦). Maths Quest ۱۲: Further Mathematics VCE Units ۳ and ٤،۵. thedn.Milton, Australia: John Wiley & Sons.

Becker, J. P. & Shimada, S. (۱۹۹۷). The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics. National Council Of Teachers Of Mathematics.

Beghetto, R. A. & Sriraman, B. (۲۰۱۷). *Creative contradictions in education: Cross disciplinary paradoxes and perspectives*. Switzerland: Springer International Publishing.

Bingolbali, E. & Bingolbali, F. (۲۰۲۰). Divergent Thinking and Convergent Thinking: Are They Promoted in Mathematics Textbooks? *International Journal of Contemporary Educational Research*, ۷(۱), ۲٤۰-۲۵۲.

Blum, W. (۲۰۱۱). Can modeling be taught and learned? Some answers from empirical research. In Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R. & Stillman, G (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modeling*, ICTMA۱٤ (Vol. ۱, pp. ۱۵–۳۰). Springer Science & Business Media.

Blum, W. (۲۰۱۵). Quality teaching of mathematical modeling: What do we know, what can we do? In *The Proceedings of the ۱۲th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes*. pp. ۷۳–۹۶. New York: Springer.

Blum, W. & Leis, D. (۲۰۰۷). How do students and teachers deal with modeling problems? In: Haines, C. et al. (Eds), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics. Chichester*: Horwood, pp ۲۲۲-۲۳۱

Brown, J. & Ikeda, T. (۲۰۱۵). Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics. In S. Cho. (Ed.), *The Proceedings of the ۱۲th International Congress on Mathematical Education*. pp. ۴۶۹-۴۷۳. Springer, Cham.

Damayanti, H. T. & Sumardi, S. (۲۰۱۸). Mathematical creative thinking ability of junior high school students in solving open-ended problems. *JRAMathEdu* (*Journal of Research and Advances in Mathematics Education*), ۳(۱), pp ۳۶-۴۵.

Da Silva Soares, D. (۲۰۱۵) Model analysis with digital technology: a “hybrid approach”.*International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (G. Kaiser & G. A. Stillmaneds). NewYork, NY: Springer, pp. ۴۵۳–۴۶۳.

De Vink, I. C., Willemsen, R. H., Lazonder, A. W. & Kroesbergen, E. H. (۲۰۲۲). Creativity in mathematics performance: The role of divergent and convergent thinking. *British Journal of Educational Psychology*, ۹۲(۲), e۱۲۴۵۹.

Dunn, P. K. & Marshman, M. F. (۲۰۲۰). Teaching mathematical modeling: a framework to support teachers’ choice of resources. *Teaching Mathematics and its Applications*. ۳۹(۲), pp.۱۲۷-۱۴۴.

English, L. D. & Sriraman, B. (۲۰۱۰). Problem solving for the ۲۱st century. In B. Sriraman & L. D. English (Eds.), *Theories of mathematics education*: Seeking new

Fatah, A., Suryadi, D. & Sabandar, J. & Turmudi, T. (٢٠١٦). Open-Ended Approach: An Effort in Cultivating Students' Mathematical Creative Thinking Ability and Self-Esteem in Mathematics. *Journal on Mathematics Education*, ٧(١), ١١-٢٠

Guilford, J. P.(١٩٦٧). *The Nature of Human Intelligence*. McGraw-Hill, New York.

Hershkowitz, R., Tabach, M. & Dreyfus, T. (٢٠١٧). Creative reasoning and shifts of knowledge in the mathematics classroom. ZDM. *The International Journal on Mathematics Education*, ٤٩(١), pp. ٢٥–٣٦.

Huynh, M., Baglin, J., Hart, C., MacGillivray, H., Bulmer, M., Dunn, P. K. & Marshman, M. (٢٠١٦) Teachers' perceptions of teaching statistics in schools using the islands. Proceedings of the Ninth Australian and New Zealand Conference on Teaching Statistics (H. MacGillivray, M. Martin & B. Phillipseds).Canberra: Statistical Society of Australia.

Ikeda, T. (٢٠١٥). Applying PISA ideas to classroom teaching of mathematical modeling. In K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing mathematical literacy: The PISA experience*. p. ٢٢١-٢٣٨. Springer, Cham.

Kwon, O. N., Park, J. H. & Park, J. S. (٢٠٠٦). Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. *Asia Pacific Education Review*, ٧(١), ٥١-٦١.

Lee, K. S., Hwang, D. J. & Seo, J. J. (٢٠٠٣). A Development of the test for mathematical creative problem-solving ability. *Research in Mathematical Education*, ٧(٣), pp. ١٦٣–١٨٩.

Munroe, L. (٢٠١٥). The Open-Ended Approach Framework. *European Journal of Educational Research*, ٤(٣), ٩٧-١٠٤. doi: ١٠,١٢٩٧٣/eu-jer.٤,٣,٩٧

Palsdottir, G. & Sriraman, B. (٢٠١٧). Teachers view on modeling as a creative mathematical activity. In R. Leikin & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and Giftedness: Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond*. pp. ٤٧–٥٥. Switzerland: Springer International Publishing.

Porter, A., McMaken, J., Hwang, J. & Yang, R. (۲۰۱۱). Common Core Standards: The new US intended curriculum. *Educational Researcher*, ٤۰(۳), ۱۰۳-۱۱٦.

Sonjaya, D. N. & Yuliyanto, A. (۲۰۲۲). Open-Ended Approach to Improving Mathematics Creative Thinking Skills of Elementary School Students. *MathNesia: Journal of Math Education*, ۱ (۱): ۲٤-

Stillman, G. A., Brown, J. P. & Geiger, V. (۲۰۱٥). Facilitating mathematization in modeling by beginning modelers in secondary school. In G. A. Stillman, W. Blum & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences* pp. ۹۳–۱۰٤. New York: Springer.

Tan, A. G. & Sriraman, B. (۲۰۱۷). Convergence in creativity development for mathematical capacity. In R. Leikin & B. Sriraman (Eds.), *Creativity and giftedness: Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond*. pp. ۱۱۷–۱۳٤. Switzerland: Springer. International Publishing.

Wittmann, E. C. (۲۰۲۱). Unfolding the Educational and Practical Resources; Inherent in Mathematics for Teaching Mathematics. In: *Connecting Mathematics and Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/۱۰,۱۰۰۷/۹۷۸-۳-۰۳۰-٦۱٥۷۰-۳_۱